现代应用数学丛书

非线性振动论

〔日〕古屋茂
南雲仁一 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

非線性振动论

〔日〕古屋茂 南雲仁一 著

呂紹明 譯

朱照宣 校

上海科學技術出版社

内 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本，簡洁而概括地介紹了非綫性振动理論的基本成果。全书共分：自治系統的几何方法，自治系統的解析方法，非自治系統的几何方法，非自治系統的解析方法等四章。所取数学模型限于二維系統，即相应于力学中单自由度系統或电学中的单回路系統。对实际振动問題中高于二維的情况，亦可从本书得到借鉴。

本书可供高等学校数学系、物理系、无綫电系师生以及有关的工程技术人員參考。

現代应用数学丛书

非 綫 性 振 动 论

原 书 名 非 綫 型 振 动 論

原 著 者 〔日〕古屋茂 南雲仁一 著

原出版者 岩 波 书 店 1957

譯 者 呂 紹 明

校 者 朱 照 宣

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 3 26/32 字数 88,000

1962年9月第1版 1962年9月第1次印刷

印数 1—6,500

統一书号：13119・476

定 价：（十四）0.66元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

一个物理的振动系統，当它的元素都服从綫性規則时，可以用綫性方程来表示。在很多元素中，有关的物理量的变化不能視为(在某种意义下)很小，因而出現非綫性，对应的方程就是非綫性方程。还有，在元素的微小变化不服从綫性規則的情况下，也成为非綫性方程❶。凡是由非綫性方程描述的振动統称为非綫性振动❷。很早 H. Helmholtz, J. Rayleigh 就注意过非綫性振动，但引起特别的注意还是 1920 年前后的事，例如 B. van der Pol 和 G. Duffing 的工作。成为問題的方程的形式在很多情况中是簡单的，但分析一些复杂的試驗結果时就遇到意外的困难，还不能用数学的方法来完成。

非綫性振动的研究一向是以工程技术問題为主，特别在电系統和机械系統中。一般說来，在机械中采取各种方法来防止振动的发生；在电系統中，因为电振蕩和通訊工程相关，振蕩被用来达到通訊的目的。所以振动理論，特别是非綫性振动理論，在电訊工程学中內容最丰富。非綫性振动問題的主要部分是随着电工学发展起来的，其中許多所处理的对象关系到非綫性回路中的振蕩。它們在数学上就表示为非綫性的常微分方程，而周期解的稳定性则是其中心問題。总之，这里主要的目标是研究非綫性振动现象在大范圍内的性质，因此相应的数学方法也着重于非小范圍的(非局部的)手法。

除了振动以外，还有其他重要的非綫性問題，这些統称为非綫性力学。

---

❶ 上述两种非綫性分别称为可綫性化的和不可綫性化的。——校者注

❷ 在电学中譯为振蕩、在力学中称振动，統称时用振动。——校者注

本书的目的是对于振动的数学模型，特别是非綫性振动的数学模型（即非綫性現象的数学表現——非綫性方程）作初步的說明，說明其中主要的数学分析方法，假設讀者并不具有特别的准备知識。这种数学方法关系到天体力学中发达的理論，即 H. Poincaré 的振动理論和 A. M. Ляпунов 的稳定性理論，以及关于一阶方程的 Poincaré–Bendixson 的理論，H. M. Крылов，H. H. Боголюбов 和 N. Levinson 等人发展的重要理論。限于篇幅，本书不能对上述数学方法全部介紹，而只介紹和应用直接有关的基本部分，所取的数学模型限于二元联立常微分方程（或二阶常微分方程）。对非綫性方程所举的例子，是非綫性現象的典型模型，以便尽可能說明一些基本的非綫性現象。这里着重考虑了統一的現象，着眼于这种現象有什么性质，因而相应的模型可能有什么样的变化。这就省去了无益的冗长的計算，以便有效地将应該注意的現象的主要性质鮮明地表达出来。虽然例示的模型中照原样并不适用于現代技术的也不少，但是它們还表示了問題的实质。

如前所述，过去研究非綫性問題主要是沿着工程技术方向进行的。但非綫性問題并不仅仅限于自然現象，而且广泛地存在于生物界、心理世界和社会現象，特别在經济現象中它是显著的。在自然界中的非綫性現象，一旦抽象化成为数学模型，其結果显然就可适用于其他范圍，目前已經有这种尝試。

在进入本論以前，先簡单地說明非綫性振动的研究情况。

1920 年，荷兰无綫电工程师 B. van der Pol 和 E. V. Appleton 为了說明三极管振蕩器的波形，从研究电子管的非綫性特性开始，导出了 van der Pol 方程；二十年代有許多非綫性振动方面的研究，但只能說是建立了非綫性振动理論的基础。在这以后，W. M. H. Greaves 等关于 Poincaré 天体力学中微分方程的研究是有成效的，同时 A. Liénard 等也有貢献，但是眞正惊人的发展则是在 1930 年研究中心轉移到苏联以后的十年。

苏联有两个完全独立的学派进行过研究。一个是以莫斯科振动研究所

为中心的学派，另一个是基輔的 Крылов，Боголюбов 等人。

1930 年，物理学家 Л. Мандельштам 在莫斯科創設了振动研究所。数学、物理、电工学等方面的許多专家在这里协力合作，对非綫性振动作深入的研究。其中特别著名的有 Л. С. Понтрягин，Н. Д. Папалекси，А. А. Андронов，С. Э. Хайкин，А. А. Витт 等人，他們除了采用 Poincaré 的方法以外，实际上还运用了 Ляпунов 的稳定性理論 (1892 年在俄国发表，1907 年西欧才知道)。这个学派的許多成績的一部分就是 Андронов-Хайкин 的"振动理論"(1937 年在莫斯科出版，1949 年由 S. Lefschetz 譯成英文❶)。

另一方面，Крылов，Боголюбов 在 1930 年发表了許多关于拟調和振动的論文，1934 年和 1937 年在基輔发行了"非綫性力学"一书 (1943 年，Lefschetz 节譯为英文出版)。

1930 年以来苏联的惊人发展，在第二次大战以前外国都不知道。在大战时期中，N. Minorsky 在自动控制問題中指出非綫性力学是有用的，同时介紹苏联的进展，出版了"非綫性力学引論"一书。以此为起点，美国和西欧的非綫性振动研究也开始了，許多學者开始关心这个問題。在数学方面进行研究的，以 S. Lefschetz 为首，有 M. L. Cartwright，N. Levinson，K. O. Friedrichs，W. Wasow，J. J. Stoker，J. Haag，N. W. McLachlan 等人。

苏联現在仍然保持很高的水平，И. Г. Малкин，Н. Н. Баутин 等发表了許多研究成果，在这方面的专著也很多，特别是 В. В. Немыцкий，В. В. Степанов 的"微分方程定性理論"❷ (1947) 和 Б. В. Булгаков 的"振动" (1954) 是有名的。

下面叙述的方法，将大致分为几何的 (或拓扑的) 方法和解析的方法。这样的区分是便利的，大体上前者适合于定性的研究，而后者则显然对定量的研究很有效。

关于变量 t (或者 τ) 的微分方程，如果它不明显地含有 t，叫做是自治的 (autonomous)；明显含有 t 的叫做非自治的 (non-

❶ 1959 年在莫斯科出版的"振动理論"补上了原作者之一 Витт 的名字，并且由 Андронов 的学生 Н. А. Железцов 作了补充和修訂。Lefschetz 的英譯本是按 1937 年版节譯的。——校者注

❷ 有汉譯本，王柔怀、童勤謨譯，科学出版社，1956，1959。——校者注

autonomous)。本书中 $\dot{f}$ 代表 $\frac{df}{dt}$。在下面的第一章說明研究自治系統

$$\dot{x}=P(x, y), \quad \dot{y}=Q(x, y)$$

的几何方法。第二章主要是关于

$$\ddot{x}+x=\mu f(x, \dot{x}) \quad (其中\ 0<\mu\ll 1)$$

的解析方法。第三章是关于非自治系統

$$\dot{x}=P(x, y, t), \quad \dot{y}=Q(x, y, t)$$

的几何方法。第四章主要是关于

$$\ddot{x}+x=\mu f(x, \dot{x}, t) \quad (其中\ 0<\mu\ll 1)$$

的解析方法。

目　录

第1章　自治系統的几何方法

本章对下列方程：

$$\dot{x}=P(x,y),\quad \dot{y}=Q(x,y) \tag{1}$$

解的状况作几何学的研究，并用来研究(1)式所表示的物理系統的运动情况。

§1 相平面和相点

設 t 为时間，則(1)式可以解释为規定在 xy 平面上的一点 (x, y) 卽**相点**的运动。这点的运动軌迹叫作**軌道**，xy 平面称为**相平面**。

相平面上使 $\dot{x}=0$，$\dot{y}=0$ 的点，卽使

$$P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$$

的点 (x_0, y_0) 叫作(1)式的**平衡点**。此时

$$x(t)=x_0,\quad y(t)=y_0$$

是(1)的解。平衡点是仅由一点組成的軌道，可是以后所謂軌道将不包括所有平衡点。

設物理系統的运动方程为

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}),$$

它可以写成(1)的形式：

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=f(x,y).$$

这个系統的状态是由位置 x 和速度 $\dot{x}$ 所确定，所以采用相点和相平面的說法。当 $f(a,0)=0$ 时，則 $x=a$ 満足 $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$. 在位置 a 的靜止状态对应于

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=f(x,y)$$

的平衡点 $(a, 0)$.

以下除非預先特殊声明，$P(x, y)$，$Q(x, y)$ 取作为 x 和 y 的实解析函数；即 P 与 Q 是实函数，且在任意点 (a, b) 的邻近能展成收斂的冪級数。在这情况下，对于任意的 a, b，(1) 式总有唯一的解存在，当 $t=t_0$ 时，$x=a$，$y=b$。（参照本丛书中《常微分方程》第 33 頁。）其中平衡点假定是孤立的（即在平衡点充分邻近处沒有其他平衡点），于是在相平面的有限范圍內，平衡点只能是有限个。

設通过平衡点 (x_0, y_0) 軌道上有一活动相点 (x, y) $(\neq(x_0, y_0))$，它实际上需要无限的时間❶才能到达平衡点。这是因为，假如它在有限时間❷到达平衡点，则在解 (x_0, y_0) 以外还有解，此与解的唯一性矛盾（設 $t=t_0$ 时 $x=x_0$，$y=y_0$，(1) 式唯一的解是 $x(t)\equiv x_0$，$y(t)\equiv y_0$）。

其次，設有正数 T，对于任意的 t，若 (1) 式的解滿足

$$x(t+T)=x(t),\quad y(t+T)=y(t),$$

则該解称为周期解，T 称为周期。平衡点所表示的解

$$x(t)=a,\quad y(t)=b$$

也是周期解。不过以后为了方便，所謂周期解将专指平衡点所表示的解以外的情况。不通过平衡点的单一閉曲綫組成的軌道称为**閉軌道**。在相平面上周期解表示为閉軌道。

在 (1) 的解里，相平面上平衡点或閉軌道所表示的那些解是重要的，因为下列定理成立（証略）。

設相平面上 (1) 式的解当 $t\to+\infty$（或 $t\to-\infty$）时在有限范圍內逗留，则总有下列情况之一：(a) 解自身是平衡点或閉軌道；(b) $t\to+\infty$（或 $t\to-\infty$）时，解趋近于平衡点或閉軌道；(c) 当 $t\to+\infty$（或 $t\to-\infty$）时，解无限接近于由有限个平衡点和有限个軌道所組成的图形，图形中每一个軌道当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时，趋向于这些平衡点之一。

下面在 §2、§3 中說明平衡点，在 §4 中說明閉軌道。

❶ 即 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$。——校者注

❷ 設它在 $t=t_0$ 时到达 (x_0, y_0)，就取 $x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$ 为起始条件。——校者注

設(1)式的右边是 x 的周期函数(周期为 L)，为了观察軌道的形状，可以不用 xy 平面，而将二直綫

$$x=x_0, \quad x=x_0+L$$

当作同一直綫，并在正圆柱面上考虑；这种方法是方便的。如果右边对于 x 和 y 都是周期的，则采用在圆环面考虑的方法是方便的。

§2 平 衡 点

在相平面上(1)式平衡点 (x_0, y_0) 附近的相点随着时間的增加，可能是从平衡点离开，也可能不是这种情形。在前一种情形 (x_0, y_0) 叫作不稳定的平衡点，在后者则叫作**稳定的**平衡点。这就是說，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，能够适当地确定 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得在 $t=t_0$ 时，通过以 (x_0, y_0) 为中心、δ 为半徑的圓内的点的(1)式的解 $(x(t), y(t))$，在 $t>t_0$ 时就逗留在以 (x_0, y_0) 为中心、ε 为半徑的圓内，則(1)式的平衡点 (x_0, y_0) 是稳定的。不是稳定的平衡点叫作不稳定的。

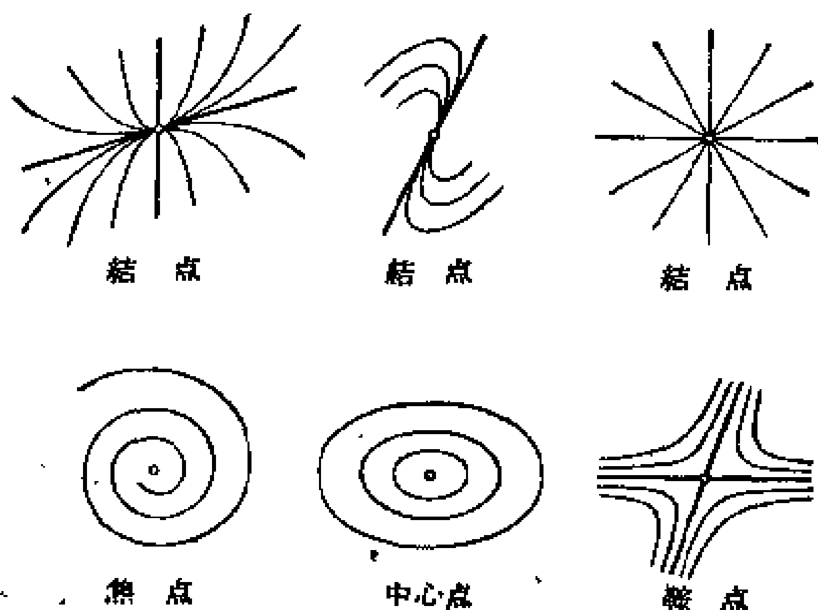


图 2.1

在平衡点邻近軌道的形状如图 2.1 所示，一般可区分为**結点** (node)，**焦点** (focus)，**中心点** (centre) 和**鞍点** (saddle)(以后所述

特殊情形除外)。中心点是稳定的，鞍点是不稳定的；而結点和焦点則可能是稳定的，也可能是不稳定的。設当 t 增加时相点趋于軌道上的平衡点，則結点或焦点是稳定的，由平衡点离开則是不稳定的。

下面分别說明。在平衡点 (x_0, y_0) 处，令

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b=\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ c&=\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0), \quad d=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

則(1)式变为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=P(x, y)-P(x_0, y_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)+\cdots, \\ \dot{y}&=Q(x, y)-Q(x_0, y_0)=c(x-x_0)+d(y-y_0)+\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中設 $ad-bc\neq 0$，若无此假定，将出現图 2.1 以外的类型。

此处取

$$\xi=x-x_0, \quad \eta=y-y_0,$$

并取(2.2)右边的一次項，考虑下列方程：

$$\dot{\xi}=a\xi+b\eta, \quad \dot{\eta}=c\xi+d\eta. \tag{2.3}$$

这里在(2.2)（亦即(1)）的平衡点 (x_0, y_0) 邻近解的形状就是(2.3)的平衡点(0, 0)邻近解的形状，几乎沒有变化。这是根据(2.2)右边二次以上的項远比一次項小的情况而設想的。实际上，(2.3)的平衡点 $\xi=0$, $\eta=0$ 的类型与(1)式的平衡点 $x=x_0$, $y=y_0$ 的类型是一致的，除去例外的情况(証略)。所謂例外，是指当 $\xi=0$, $\eta=0$ 是中心点时，$x=x_0$, $y=y_0$ 可能是中心点，也可能是焦点。

(2.3)是容易积分的。由(2.3)消去 η，則有

$$\ddot{\xi}+p\dot{\xi}+q\xi=0, \quad p=-(a+d), \quad q=ad-bc\neq 0.$$

从而求得 $\rho^2+p\rho+q=0$ 的两根 ρ_1, ρ_2。当 $\rho_1\neq\rho_2$ 时，

$$\xi=A\exp(\rho_1 t)+B\exp(\rho_2 t),$$

而当 $\rho_1=\rho_2$ 时，

$$\xi=(A+Bt)\exp(\rho_1 t)\quad (A,\ B\ 为任意常数)。$$

随后当 $b\neq0$ 时 η 由 (2.3) 的第一式确定，$b=0$ 时由第二式所确定。

于是，从 (2.1) 作出 $p=-(a+d)$，$q=ad-bc\neq0$，根据二次方程 $\rho^2+p\rho+q=0$ 根的性质，可将(1)式的平衡点分类如下：

$p>0$，$p^2\geqslant4q>0$(两根均为负) → 稳定的結点(1)。

$p>0$，$4q>p^2$(实部为負的复数) → 稳定的焦点(2)。

$p=0$，$q>0$(純虚数) → 中心点(3)或焦点(2)(4)。

$p<0$，$4q>p^2$(实部为正的复数) → 不稳定的焦点(4)。

$p<0$，$p^2\geqslant4q>0$(两根均为正) → 不稳定的結点(5)。

$q<0$(两根异号) → 鞍点(6)。

图 2.2 就表示这些关系。如前所述，$q=0$ 的情况从开始就被除去了。

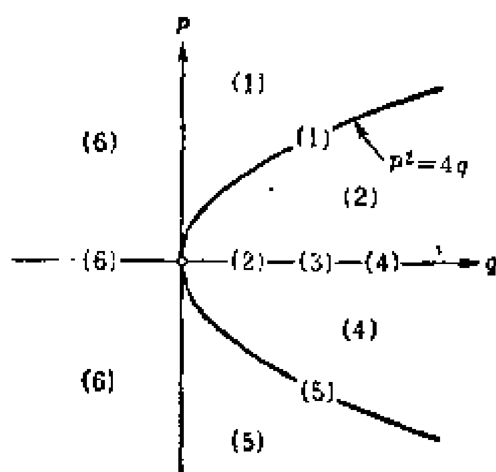


图 2.2

(1)式在一般情况(P, Q 是解析函数，平衡点是孤立的)中出現的平衡点，除上述焦点、中心点、結点和鞍点以外，还有下列的类型。如将平衡点的邻近，分成为有限个以平衡点为中心的扇形部分，則分別出現**抛物型**(对应于一次近似中的結点，可以是稳定的或不稳定的)，**双曲型**(对应于一次近似中的鞍点，不稳定的)，以及**橢圓型**(一次近似中不出現，一般为不稳定)等类型(参閱图 2.3)。

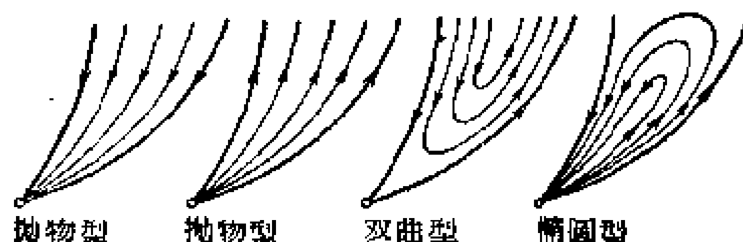


图 2.3

在运动方程为 $\ddot{x}=f(x, \dot{x})$ 的情形中，則 $\dot{x}=y, \dot{y}=f(x, y)$，在平衡点 $(a, 0)$ 处 $(f(a, 0)=0)$ 有

$$p=-f_{\dot{x}}(a, 0), \quad q=-f_x(a, 0).$$

因此，若 $f_x>0$，則得鞍点（不穩定）；若 $f_x<0$，則在 $f_{\dot{x}}>0$ 的情况中平衡点为不穩定，在 $f_{\dot{x}}<0$ 的情况中为穩定。若 $f_x<0$ 而且 $(f_{\dot{x}})^2>-4f_x$，則得結点；若 $(f_{\dot{x}})^2<-4f_x$，則得焦点。趋近（或离开）焦点平衡点时，x 的动作是振动性的，趋近（或远离）結点平衡点时，x 的动作是非振动性的。

(1)式的更简单的方程是：$\dot{x}=P(x)$，这里平衡点是使 $P(a)=0$ 的点 $x=a$。若 $P'(a)<0$，則在 a 点邻近的相点随 $t\to+\infty$ 而趋近于 a（穩定）。若 $P'(a)>0$，則从 a 点离开（不穩定）。一般說来，当 $t\to+\infty$ 时，x 或者趋近一个平衡点，或者 $x\to\pm\infty$。

这里还应注意，所謂不穩定的平衡点，对应于物理上不能实現的平衡状态。在一般物理現象中，由于系統中經常有微小的干扰作用，所以我們說系統不可能停留在不穩定的平衡状态。

例 如图2.4所示，考虑两台串激式直流发电机 (D_1, D_2) 的并联运轉，其共同負荷为 R。为了簡单起見，設两台发电机具有同一特性：$E=f(i)$（图2.5，其中 f 是奇函数）。由 Kirchhoff 法則（以后簡写为 Kh 法則），

$$L\dot{i}_1+ri_1+R(i_1+i_2)=f(i_1),$$
$$L\dot{i}_2+ri_2+R(i_1+i_2)=f(i_2).$$

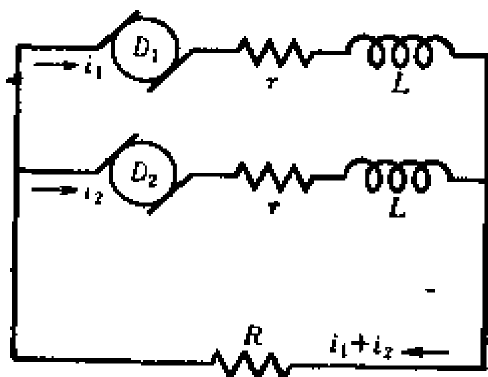


图 2.4

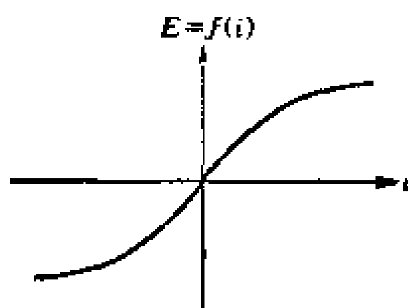


图 2.5

这里的平衡点是 (i_1, i_2) 平面上两根曲綫：

$$ri_1+R(i_1+i_2)=f(i_1), \quad ri_2+R(i_1+i_2)=f(i_2)$$

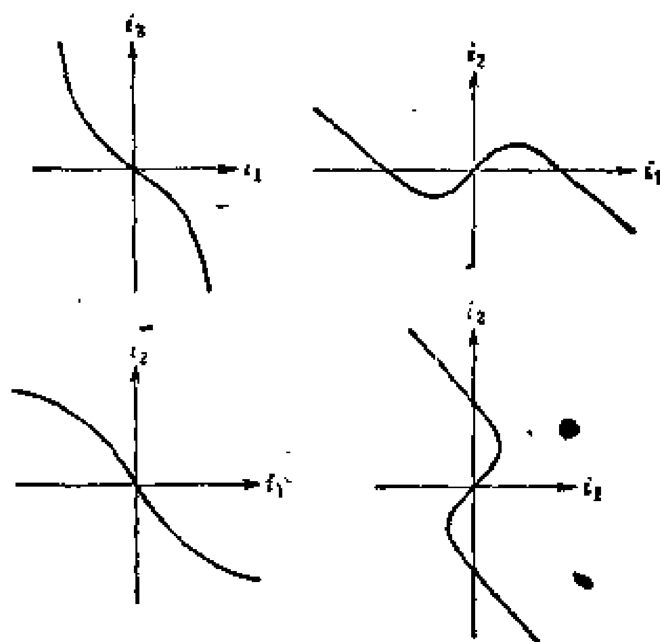


图 2.6

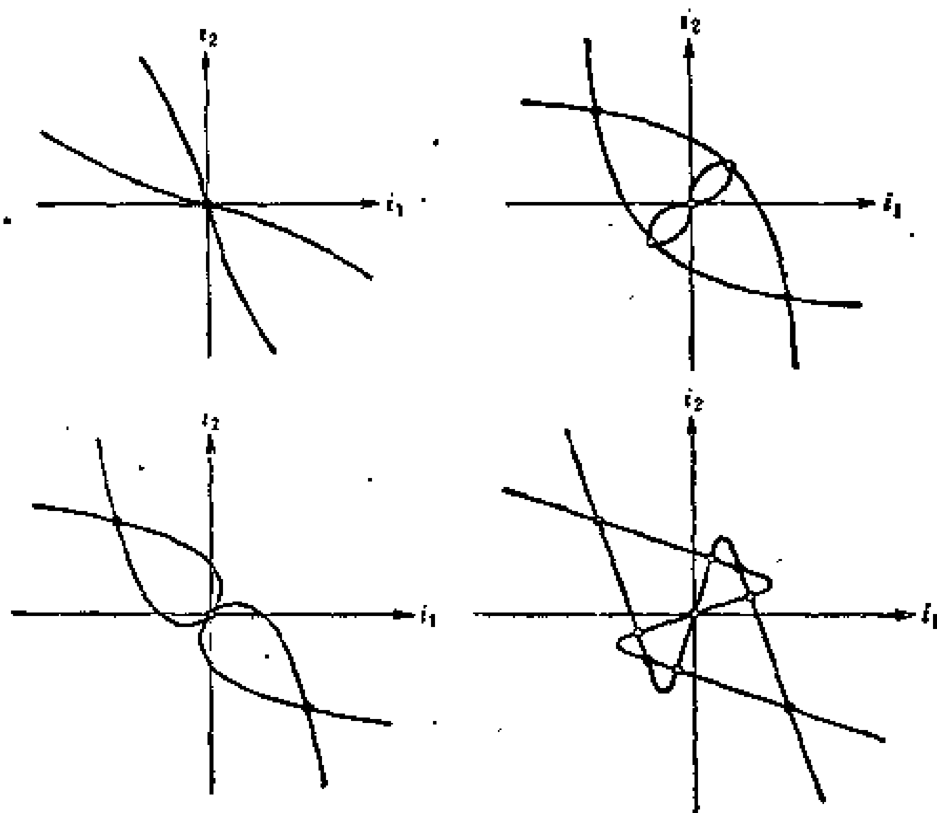


图 2.7

的交点。这两根曲綫可能如图 2.6 所示❶。从而平衡点可能如图 2.7 所示，共有一个、三个、五个或九个。假如 $r>f'(0)$ 原点为稳定的。假如 $r<f'(0)$ 原点为不稳定的。更当 $f'(0)-2R<r<f'(0)$ 时，为鞍点(不稳定)。$r<f'(0)-2R$ 时为不稳定的結点(图 2.7)。各种情况的相平面的大体模样如图 2.8 所示❷。值得注意的是，直綫 $i_1+i_2=0$ 上的平衡点(原点除外)全部是稳定的。这种平衡点对应的状态就是供給負荷的电流 $i_1+i_2=0$，意思是由一个发电机所产生的电流全为另一发电机消耗掉。第二个发电机实际上起了电动

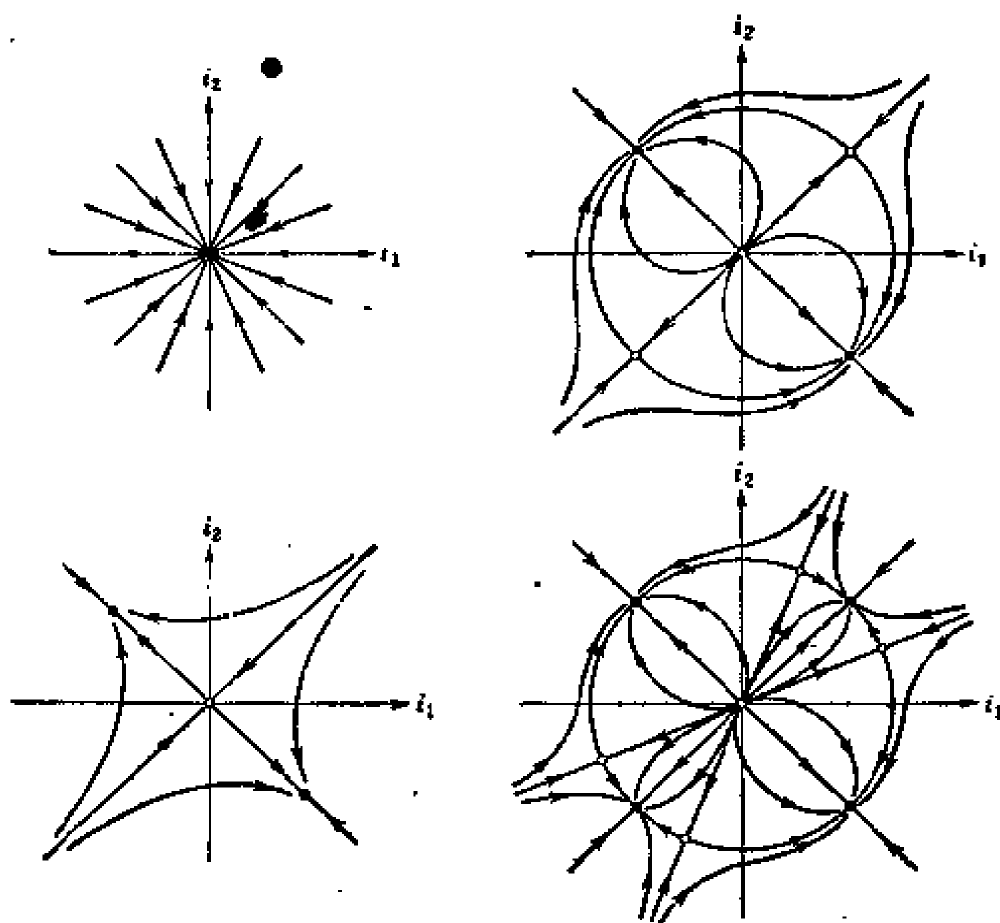


图 2.8

❶ 当 $f'(0)<r+R$ 时，这两根曲綫分别如图 2.6 中左上、左下所示。当 $f'(0)>r+R$ 时，这两根曲綫分别如图 2.6 中右上、右下所示。——校者注

❷ 图 2.7 和图 2.8 中四种情形分别为：左上，$r>f'(0)$，一个平衡点；左下，$f'(0)-2R<r<f'(0)$，三个平衡点；右上，$r<f'(0)-2R$ 且 $r<f'(a)$，五个平衡点；右下，$r<f'(0)-2R$，且 $r>f'(a)$，九个平衡点；这里 $a\neq 0$ 且 (a, a) 是平衡点。——校者注

机的作用，这样的系統对外部不能供給电流。可是如图 2.9 那样交叉联接，則能使 $i_1+i_2=0$ 上的平衡点不稳定。

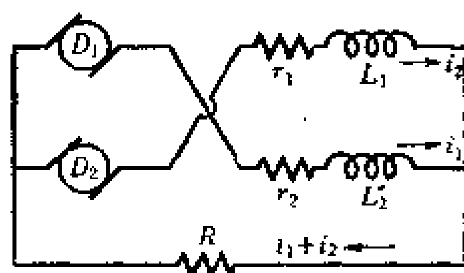


图 2.9

§3 Ляпунов的第二方法

要确定平衡点的稳定性，A. M. Ляпунов 的第二方法往往是有效的。

例如

$$\dot{x}=y-x(x^2+y^2),\quad \dot{y}=-x-y(x^2+y^2) \tag{3.1}$$

仅有一个平衡点 $x=y=0$. 这系統的一次近似式的平衡点，由 §2 判定为中心点，所以(3.1)的平衡点是中心点或焦点。

今将 $V(x, y)=x^2+y^2$ 作为 Ляпунов 的函数 $V(x, y)$，則 $V=C$ (C 是非負的参数)是相平面上一族以原点（平衡点）为中心的同心圓，C 的大小就是半徑的平方，$C=0$ 与原点重合。

然而 (3.1) 可解釋为相平面上一个速度向量場(它在点 (x, y) 处 x 方向的分量为第一式的右边，在 y 方向的分量为第二式的右边)。如将 (3.1) 的 $\dot{x}, \dot{y}$ 代入 $\dot{V}=2x\dot{x}+2y\dot{y}$，其值为 $\dot{V}=-2(x^2+y^2)^2$❶. 除了在原点外，$\dot{V}$ 常为負，所以在任何一点（原点除外），速度向量指向通过該点的圓 $V=C$ 的內側(有原点的一側)，卽 (3.1) 的相点总是由外向內地截割着同心圓。这表示平衡点是稳定的焦点。在这个例子中，是取圓作为 $V=C$ 来考虑的，若考虑椭圓，結果也一样❷。

❶ 原书誤为 $\dot{V}=-2(x^2+y^2)$. ——校者注

❷ 作者可能是指在其他場合中，也可取椭圓作为 $V=C$. 至于对(3.1)，用椭圓作为 $V=C$ 就无法判別平衡点的稳定性。——校者注

今假定对(2.3)的平衡点 $\xi=\eta=0$ 有

$$p=-(a+d)>0, \quad q=ad-bc>0.$$

就是說平衡点是稳定的結点或稳定的焦点。在此考虑函数 V

$$V(\xi, \eta)=\frac{1}{2}(\alpha\xi^2+2\beta\xi\eta+\gamma\eta^2),$$

并在 $\dot{V}=V_\xi\dot{\xi}+V_\eta\dot{\eta}$ 中以 (2.3) 代入，并进一步使它等于 $-(\xi^2+\eta^2)$，則得

$$\alpha=-[(ad-bc)+(c^2+d^2)]/\Delta, \quad \beta=(ac+bd)/\Delta\text{❶},$$

$$\gamma=-[(ad-bc)+(a^2+b^2)]/\Delta, \quad \Delta=(a+d)(ad-bc)<0.$$

根据假設可知 $\alpha>0$, $\gamma>0$, 故 $\beta^2-\alpha\gamma<0$. 因而 $V(\xi, \eta)=C$ (C 为非負的参数)表現为一族以原点（平衡点）为中心的椭圓, C 的大小关系着椭圓的大小, $C=0$ 与原点重合。由于 $\dot{V}=-(\xi^2+\eta^2)<0$, (2.3)的速度向量对于椭圓族来說总是指向內側。

現在在(2.3)的右边增加新項,考慮系統

$$\dot{\xi}=a\xi+b\eta, \quad \dot{\eta}=c\xi+d\eta+r\xi. \tag{3.2}$$

在这情况中,

$$\dot{V}=-(\xi^2+\eta^2)+(\beta r\xi^2+\gamma r\xi\eta)$$
$$=-\xi^2[(\eta/\xi)^2-\gamma r(\eta/\xi)-(\beta r-1)].$$

若 $\gamma^2r^2<4(1-\beta r)$, 則 $\dot{V}$ 的値常为負的。即当 $r_1<r<r_2$ 时, (3.2)的平衡点(原点)保持稳定性。其中

$$r_1=2(-\beta-\sqrt{\beta^2+\gamma^2})/\gamma^2<0,$$
$$r_2=2(-\beta+\sqrt{\beta^2+\gamma^2})/\gamma^2>0.$$

現在考慮用一个連續函数 $f(\xi)$ ($f(0)=0$) 来代替 $r_1\xi$, 且当 $\xi>0$ 时 $r_1\xi<f(\xi)<r_2\xi$, $\xi<0$ 时 $r_1\xi>f(\xi)>r_2\xi$, 則

$$\dot{\xi}=a\xi+b\eta, \quad \dot{\eta}=c\xi+d\eta+f(\xi) \tag{3.3}$$

的平衡点(原点)也还是稳定的。其原因如下:如图 3.1 所示,对任

---

❶ 原书中誤为 $\beta=(ad+bc)/\Delta$. ——校者注

意的$\xi_1>0$挑选r'，$r_1<r'<r_2$，$f(\xi_1)=r'\xi_1$，所以在点(ξ_1, η_1)处(3.3)式速度向量的ξ-分量是$a\xi_1+b\eta_1$，而η-分量是$c\xi_1+d\eta_1+r'\xi_1$，因此，它指向通过該点的椭圓内側。在这种方法中，值得注意的是，一般説来，(1)式的右边不必假定具有解析性。

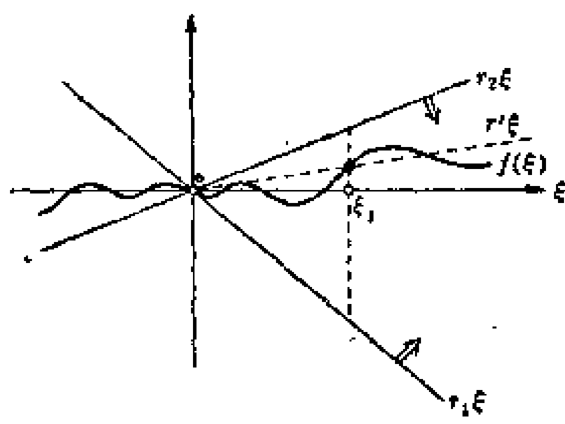


图 3.1

§4 閉軌道和极限环

和平衡点一样，也可考虑对于閉軌道C的稳定性与不稳定性。如果通过充分靠近C的点的(1)式的軌道在相平面上于C的邻近处逗留，这一閉軌道C叫作稳定的。所謂閉軌道C**稳定**，是指这样的情况：对任意$\varepsilon>0$，能适当选擇$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当$t=t_0$时通过"在$C$的$\delta$距离以内"的点的(1)式的解，在$t>t_0$时逗留在$C$的$\varepsilon$距离以内。不滿足稳定条件的閉軌道叫不稳定的。参看图4.1❶。由稳定的(不稳定的)閉軌道表示的周期解叫作**稳定**(不稳

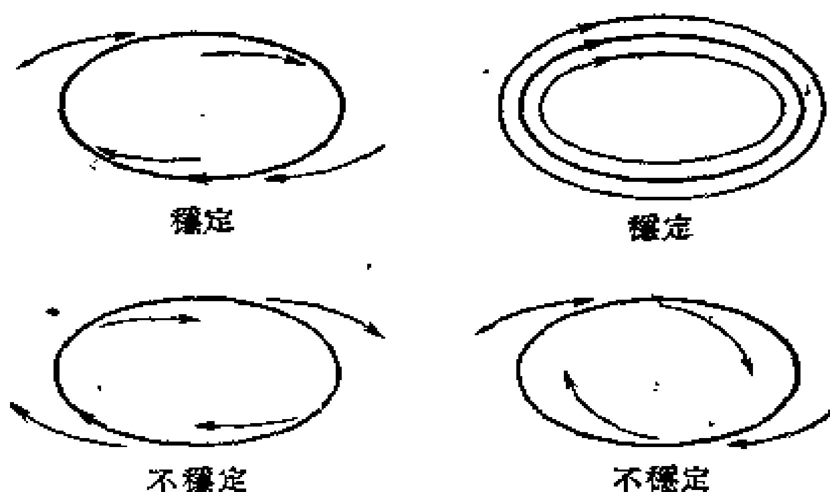


图 4.1

❶ 图中右下情形也叫做是"半稳定"的。——校者注

定)或是**軌道穩定**(orbitally stable)(軌道不穩定)的周期解。

判别稳定性所用的条件有下列定理(Poincaré **判别条件**)。

"設 T 为周期解 $(x_0(t), y_0(t))$ 的周期,則当

$$\int_0^T [P_x(x_0(t), y_0(t)) + Q_y(x_0(t), y_0(t))] dt \qquad (4.1)$$

为負时,周期解是稳定的,为正时則为不穩定,为零时則不能确定稳定或不穩定"(証略)。

孤立的閉軌道(附近沒有其他閉軌道)叫作**极限环**(limit cycle)。应注意到稳定的❶极限环对应于物理上的周期振动情况,而不穩定的极限环則对应于物理上不能实現的周期振动,稳定极限环对应的周期振动常常叫作**自激振动**。

閉軌道是否存在,閉軌道的个数以及位置如何,这些是重要的問題,可是解这些問題一般說来是困难的,需要按照各种情况选取特殊的方法。以下对解这些問題介紹三个比較一般的方法。

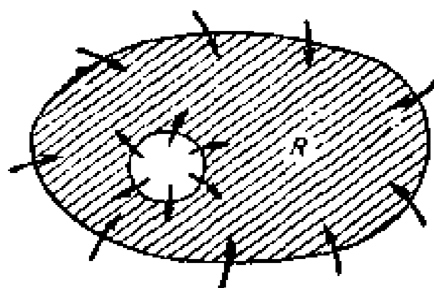


图 4.2

(1) 稳定閉軌道存在的一个充分条件。設某一个环状区域 R 的边界为解(軌道)自外向內地截割,且 R 內无平衡点,則在 R 的內部至少存在一条稳定的閉軌道。参見图 4.2。由§1的定理这一結果是很明显的。

(2) 閉軌道不存在的一个充分条件——**Bendixson 定理**。在能使 P_x+Q_y 具有确定正負号的区域內,(1)式的閉軌道不存在(假如存在閉軌道 C,則

$$0 = \int_C (Pdy - Qdx) = \iint_D (P_x + Q_y) dxdy$$

——此处 D 为 C 的內部区域——此与假定矛盾)。

---

❶ "稳定的"一詞系校者所加。——校者注

例如§3的(3.1)，(3.3)沒有周期解。对于方程 $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$，若 $f_{\dot{x}}$ 有确定的正負号，則周期解不存在。

(3) **Poincaré 指数** 对应于相平面上每一点 M 有向量 $V(M)$，其 x 分量和 y 分量各为 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$。若点 M 不是(1)式的平衡点，則 $V(M)\neq 0$。設 C 是一根分段光滑的簡单閉曲綫，C 上沒有(1)式的平衡点。当点 M 从 C 上一点 M_0 出发，沿着 C 依正向（C 的內部在方向的左側）繞过一周时，某一固定方向与 $V(M)$ 所成之夹角 θ 的变化只能是 2π 的整数倍 $2m\pi$。这个整数 m 叫 C 的**指数**，以 $I(C)$ 表之。很明显，$I(C)$ 与选取 M_0 及固定方向的方法无关。指数的表示式为

$$I(C)=\frac{1}{2\pi}\oint_C d\tan^{-1}\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2}.$$

积分沿 C 的正向一周。

$I(C)$ 的主要性质如下：

(a) 若在 C 的內部沒有(1)式的平衡点，則 $I(C)=0$（若将 C 的內部分解成非常小的网眼，由于无平衡点所以环繞每一网眼时向量 V 的变化非常小，从而指数为零。$I(C)$ 为这些指数的和，故还是零）。

(b) 如果 C 連續变形为簡单閉曲綫 C_1，且变形时不横穿过平衡点，則 $I(C)=I(C_1)$（由(a)这是很明显的）。

(c) 若 C 是閉軌道，則 $I(C)=+1$（証明从略，由定义直观是很明显的）。

以上对于不通过平衡点的簡单閉曲綫定义了指数，其实对于一点 A 也可以考虑指数。环繞 A（是平衡点，也可以不是平衡点）画一光滑的簡单閉曲綫 C，在 C 的內部不含 A 以外的平衡点。此时 $I(C)$ 叫点 A 的指数，以 $i(A)$ 記之。由上述(b)可知，$i(A)$ 与滿足上述条件的 C 的取法无关。$i(A)$ 具有下列性质：

(d) 若点 A 不为平衡点，則 $i(A)=0$ (由(a))。

(e) 設简单閉曲綫 C 上无平衡点，而它的内部有平衡点 A_1, A_2, …, A_n, 則 $I(C)=\sum_{k=1}^{n} i(A_k)$ (由(b))。

其次，对于在§2中已介紹过的各种平衡点($q\neq 0$)，有：

(f) 結点、焦点、中心点的指数均为 $+1$，鞍点的指数为 -1(証明省略，可是如果在图2.1中平衡点周圍画适当的閉曲綫，很容易根据定义弄清楚)。

此处所述对指数的解释，对考察閉軌道与平衡点之間的位置关系是有效的。例如：

① 閉軌道内部至少有一平衡点；

② 沒有平衡点就沒有閉軌道；

③ 平衡点只有一个且其指数不为 $+1$，則无閉軌道；

④ 包含在閉軌道内部的平衡点的指数之和为 $+1$。

以上这些由指数的性质直接导出。

§5 van der Pol 方程，Rayleigh 方程，Liénard 方程

考虑以 van der Pol 方程，Rayleigh 方程和 Liénard 方程作为具有稳定周期解方程的例子。

若将 Rayleigh 方程

$$\ddot{x}+\mu(-1+\dot{x}^2)\dot{x}+x=0 \quad (\mu>0) \tag{5.1}$$

再微分一次，并将 $\dot{x}$ 改写为 $\frac{x}{\sqrt{3}}$ ❶，則結果为

van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=0 \quad (\mu>0) \tag{5.2}$$

这同时可写成

❶ 原书为“将 $\dot{x}$ 改写为 x”。——校者注

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\mu(1-x^2)y-x, \tag{5.3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\mu(1-x^2)-\frac{x}{y}. \tag{5.4}$$

(5.3)的平衡点只是原点，它在 $\mu\geqslant 2$ 时是不稳定的結点，$\mu<2$ 时是不稳定的焦点。由于 (5.3) 对变换 $(x, y)\to(-x, -y)$ 保持不变，所以(5.3)的軌道形状❶对原点是对称的。軌道与 x 軸(原点除外)垂直相交。軌道上斜率为 C 的点的軌迹——**等傾綫**(isocline)——是

$$y=x[\mu(1-x^2)-C]^{-1}.$$

特别在曲綫

$$y=x[\mu(1-x^2)]^{-1}$$

上軌道具有水平切綫。把这曲綫在 $x<-1$ 与 $-1<x<+1$ 处的部分分别取作 A, B (参閱图 5.1)。今考虑通过曲綫 A 上一点 P 的軌道。这一軌道在 $x\leqslant 0$ 时不能出現在方程 $y'=\mu-\dfrac{x}{y}$ 通过 P

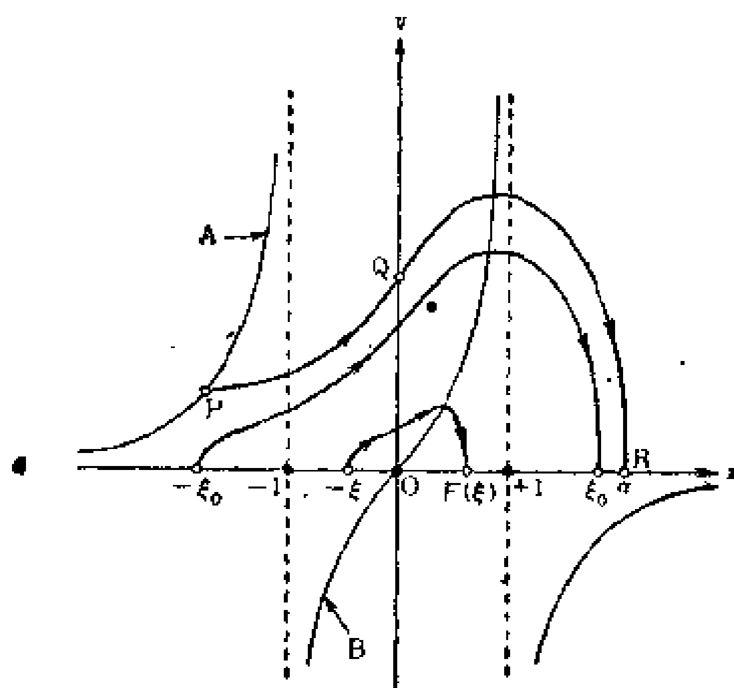


图 5.1

❶ 指所有軌道的分布情况，而不是指个别的軌道。——校者注

点的积分曲綫[1]的上面，所以它在某一Q点与y轴相交。其次，通过点Q的軌道在$x\geqslant0$时不能出現在$y'=\mu(1-x^2)$通过Q点的积分曲綫的上面，即不能出現在$y=y_0+\mu\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$ (y_0是Q点的y坐标)的上面，所以必与x轴上一点$R(a, 0)$相交。另一方面，通过点$(-\xi, 0)$ $(\xi>0)$的軌道$(y\geqslant0)$与正的x轴相交于$(F(\xi), 0)$，$F(0)=0$且$F(\xi)$在$\xi\geqslant0$时单調增大、連續、有界$(F(\xi)<a)$，而且$F'(0)>1$(由檢驗$dy/dx=\mu-x/y$的解可知)。这样，至少有一个ξ_0存在，使$F(\xi_0)=\xi_0$。这条通过$(-\xi_0, 0)$的軌道是閉軌道。实际上，只存在一个稳定的极限环。今后在 Liénard 方程的特殊情形中也显示出这一点。

当$\mu\ll1$时，这个极限环接近于以原点为中心、半徑为2的圓周(在第2章說明)；当μ增大时，其图形跟着被扭歪；$\mu\gg1$时，它是纵向(y轴的方向)細长的图形。研究$\mu\gg1$的情形时，可以引入新变量$z=-y+\mu\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$[2]，于是

$$\dot{x}=-z+\mu\left(x-\frac{x^3}{3}\right), \quad \dot{z}=x.$$

在此若重新取

$$z=\mu\xi, \quad t=\mu\tau, \quad \mu^{-2}=\varepsilon, \quad x=\eta$$

(对τ微分以“$'$”表示)，則

$$\xi'=\eta, \quad \varepsilon\eta'=(\eta-\eta^3/3)-\xi \quad (0<\varepsilon\ll1), \tag{5.5}$$

或者

$$\varepsilon\xi''+(-\xi'+\xi'^3/3)+\xi=0 \quad (0<\varepsilon\ll1). \tag{5.6}$$

对于$\varepsilon=0$，(5.5)是

---

[1] 方程 $y'=\mu-\frac{x}{y}$ 相当于綫性系統 $\ddot{x}-\mu\dot{x}+x=0$，它的这根积分曲綫一定和y正軸相交。——校者注

[2] 这一句原书为“可以 $\dot{x}=y$ 代入”，有誤。这里采用的变換称为 Liénard 变換。——譯者注

$$\xi'=\eta,\quad 0=(\eta-\eta^3/3)-\xi. \tag{5.7}$$

若在(ξ,η)平面上将(5.7)的第二式所表示的曲綫取作Γ，则通过远离Γ的点的(5.5)的軌道差不多是垂直的。如图5.2，从点P出发的相点按图中实綫运动。实际上，(5.5)的閉軌道当$\varepsilon\to+0(\mu\to+\infty)$时接近于图5.3所示的閉曲綫$D$（由$\Gamma$的一部分与綫段所組成）。这里$R(-2/3,2)$，$S(2/3,1)$。

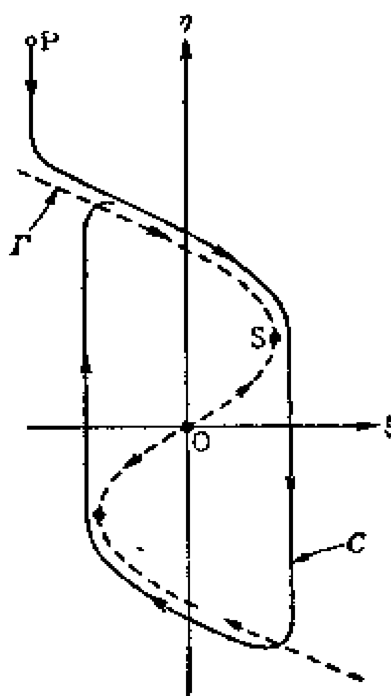


图 5.2

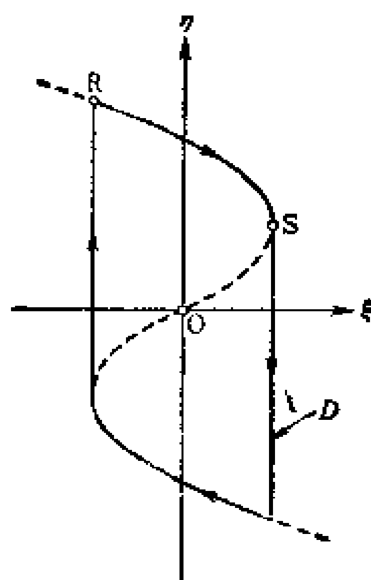


图 5.3

在(ξ,η)平面上作一个对称于原点的环状区域Ω，其上半部如图5.4所示。直綫$\sqrt{\varepsilon}\,\eta=-\xi-2/3$与$\xi=\eta-\eta^3/3$的交点为$B$，其纵坐标取作$a$。直綫$\sqrt{\varepsilon}\,\eta=\xi+2/3$与$\xi=\eta-\eta^3/3$的交点取作为$M(b,c)$。曲綫$LQM$是以$H(b,0)$为中心，以$HM(=c)$和$HL$各为半长軸与半短軸的椭圓的四分之一。曲綫$BKJ$是将曲綫$BRMPSN$上纵坐标为$\eta$的点都向右移动$\sqrt{\varepsilon(a^2-\eta^2)}$而作出的曲綫。点$M$在纵軸的左側，如果$LM$的斜率$=\varepsilon^{-1/2}>LP$的斜率$=\sqrt{3}/(2/3)\approx2.6$，即当$a>$約2.6时，我們来考虑这种情况。

首先，$\overline{AL}=NJ=\sqrt{\varepsilon}\,a$。在綫段$AB$、$NS$上，(5.5)的速度向量場指向$\Omega$的内側$(\xi'>0)$。对曲綫$MPS$也是一样$(\xi'>0,\ \eta'=0)$。其次在曲綫$BK$

$$\xi=\eta-\eta^3/3+\sqrt{\varepsilon(a^2-\eta^2)}\quad(1<\eta<a)$$

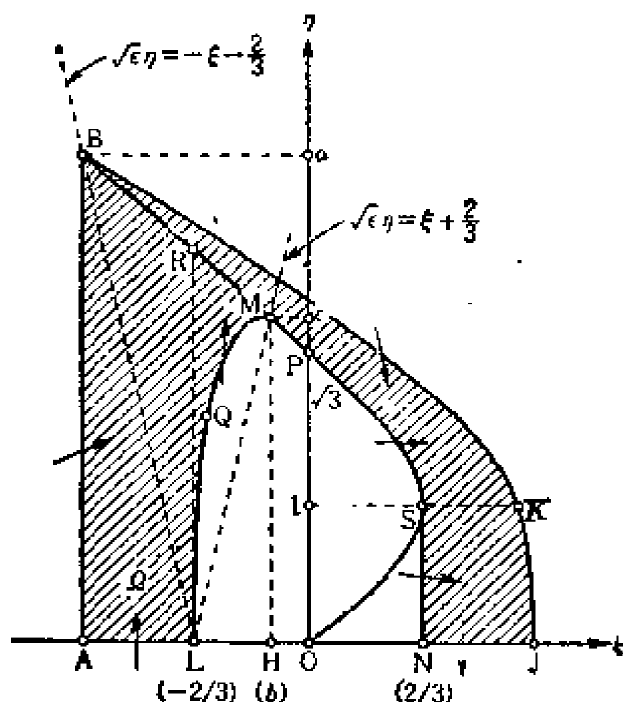


图　5.4

上任一点 $(\xi,\ \eta)$ 处，切綫斜率的倒数 $=(d\xi/d\eta)^*=1-\eta^2-\sqrt{\varepsilon}\ \eta/\sqrt{a^2-\eta^2}$ $=[(1-\eta^2)\ \sqrt{a^2-\eta^2}\ -\sqrt{\varepsilon}\,\eta]/\sqrt{a^2-\eta^2}<-\sqrt{\varepsilon}\ \ \eta/\sqrt{a^2-\eta^2}=\varepsilon\eta/[(\eta-\eta^3/3)-\xi]=d\xi/d\eta=$ 在点 $(\xi,\ \eta)$ 处向量斜率的倒数。从而在这曲綫上向量是指向內側的。在曲綫 KJ 上，

$$\xi=2/3+\sqrt{\varepsilon(a^2-\eta^2)}\qquad(0<\eta<1),$$

由于

$$\begin{aligned}(d\xi/d\eta)^*&=-\sqrt{\varepsilon}\,\eta/\sqrt{a^2-\eta^2}\\&=-\varepsilon\eta/(\xi-2/3)<-\varepsilon\eta/[\xi-(\eta-\eta^3/3)]\\&=\varepsilon\eta/[(\eta-\eta^3/3)-\xi]=d\xi/d\eta,\end{aligned}$$

所以矢量也是內向的。在曲綫 LQM 上，

$(\xi-b)^2/(b+2/3)^2+\eta^2/c^2=1$ $(0<\eta<c,\ -2/3<\xi<b$，其中 $\sqrt{\varepsilon}\ c=b+2/3)$，

$$(d\xi/d\eta)^*=\varepsilon\eta/(b-\xi)>\varepsilon\eta/[(\eta-\eta^3/3)-\xi]=d\xi/d\eta,$$

所以矢量也是內向的。結果在 Ω 的边界上 (5.5) 的向量場全部指向 Ω 的內側。由于 Ω 內沒有平衡点，所以由 §4,(1)，在 Ω 內存在閉軌道。由于 $\eta>0$ 时 $\xi'<0$，$\eta<0$ 时 $\xi'<0$，所以閉軌道把原点圍住。因此，当 $\varepsilon\to+0$ 时 $(\mu\to+\infty)$ 接近于閉曲綫 D。对于 $x(=\eta)$ 的振幅 x_0（$|x|$ 的最大値），由图 $c<x_0<a$ 显

然成立，这里 a 是

$$s^3-3(1+\sqrt{\varepsilon})s-2=0$$

的最大正根，c 是

$$s^3-3(1-\sqrt{\varepsilon})s-2=0$$

的最大正根。

今若取(5.5)的閉軌道为 C，其周期为

$$T(\varepsilon)=\int_C \eta^{-1}d\xi,$$

当 ε 充分小时，C 可用 D 代替，如果这种情形中周期是 T，则

$$T(\varepsilon)\approx T=\int_D \eta^{-1}d\xi.$$

由于在 D 的垂直部分 $d\xi=0$，所以

$$T=2\int_2^1(1-\eta^2)\eta^{-1}d\eta=3-2\log 2.$$

若回到时間变量 t，则

$$T=2\mu\left(\frac{3}{2}-\log 2\right).$$

将(5.7)积分，得 $x(t)$ 的形状如图5.5。在 $t_0<t<t_0+\dfrac{T}{2}$ [1] 时，它是

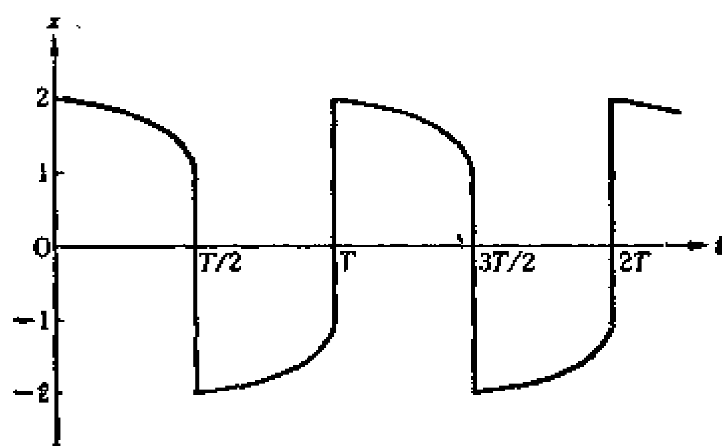


图 5.5

[1] 图5.5表示 $t_0=0$ 的情形。——校者注

$$\frac{x^2}{2}-\log x=2-\log 2-\frac{1}{\mu}(t-t_0),$$

在 $t_0+\frac{T}{2}<t<t_0+T$ 时，$x(t)=-x\left(t-\frac{T}{2}\right)$.

若作稍微更詳細的研究，可以知道(5.1)的周期解当 $\mu\to+\infty$ 时，

$$T=2\mu\left(\frac{3}{2}-\log 2\right)+7.014\,\mu^{-1/3}+o(\mu^{-1/3}),$$

$$x_0=2+0.779\mu^{-4/3}+o(\mu^{-4/3}).$$

另一方面，从第2章§7可知道，当 $\mu\to+0$ 时，

$$T=2\pi+O(\mu^2),\quad x_0=2+O(\mu).$$

因而尽管(5.2)周期解的周期随 μ 增长而增长，可是振幅(x_0)对于 $0<\mu<+\infty$ 却大体上一定，其变化在1%以下 ($2<x_0<2.02$).

对于任意正的 μ，設(5.2)周期解的周期为 T，则

$$\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x\,dt=0.$$

将(5.2)对 $\dot{x}$, x, x^3 等积分，得下列关系：

$$\overline{x^2}=\overline{\dot{x}^2}=\overline{x^2\dot{x}^2}=\frac{1}{3}\overline{x^4}.$$

在 μ 大的情况下，(5.2)周期解的波形叫作**張弛振动**(relaxation oscillation)。

現在考虑 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{5.8}$$

其中

1° $f(x)=f(-x)$, $f(0)<0$.

2° $g(-x)=-g(x)$, $x\neq 0$ 时 $xg(x)>0$.

又取 $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$,

3° $0<x<a$ 时，$F(x)<0$, $F(a)=0$, $a<x$ 时，$F(x)>0$.

4° $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$.

例如，van der Pol 方程就是这种形式。

在以上假定下，(5.8)具有唯一周期解。任意的解 ($\neq 0$) 当 $t\to+\infty$ 时都收敛于周期解。此也可以表示为方程

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{5.9}$$

具有唯一稳定的极限环。由于 (5.9) 对变换 $(x, y)\to(-x-y)$ 不变，所以軌道关于原点对称❶。原点是不稳定的平衡点。軌道在 y 軸上具有平行于 x 軸的切綫，在 $y=F(x)$ 上具有平行于 y 軸的切綫。其次，令

$$\lambda(x, y)=y^2/2+G(x)\quad \left(G(x)=\int_0^x g(x)\,dx\right),$$

考虑一根和 $y=F(x)$ 在点 $B(\alpha, F(\alpha))$ $(\alpha>0)$ 处相交的軌道，在这軌道上 $(x\geqslant 0)$ 确定出下列綫积分(参見图 5.6)：

$$\varphi(\alpha)=\int_{ABC}d\lambda=\int_{ABC}F(x)\,dy=\lambda_C-\lambda_A.$$

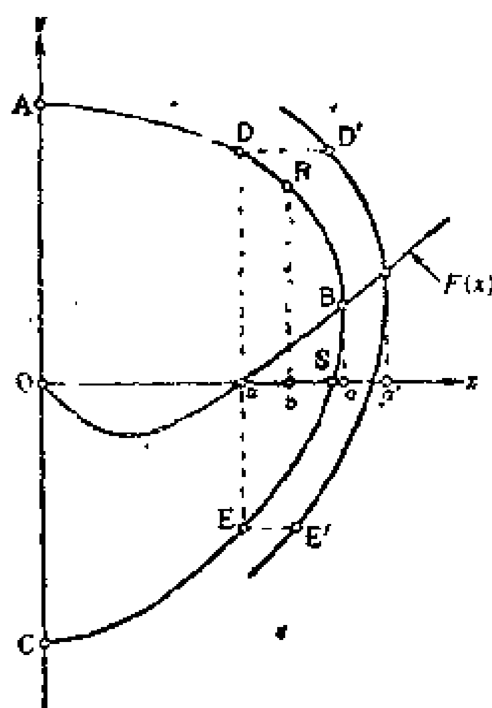


图 5.6

❶ 指軌道的分布情况对原点对称，而不是指单一軌道对原点对称。——校者注

由于$\lambda(0, y)=y^2/2$，所以条件 $OA=OC$ 和 $\varphi(\alpha)=0$ 是等价的。由于軌道关于原点的对称性❶，所以可把存在着唯一的极限环表示成 $\varphi(\alpha)=0$ 具有唯一的根。在 $\alpha\leqslant a$ 时 $\varphi(\alpha)>0$ (因 $F<0$, $dy<0$)。其次取 $\alpha\geqslant a$，由图 5.6，

$$\varphi(\alpha)=\int_{AD} d\lambda+\int_{DE} d\lambda+\int_{EC} d\lambda.$$

这里右边第一项和第三项为正，第二项为負。由于

$$\int_{AD} d\lambda=\int_0^a F\frac{dy}{dx}\,dx=\int_0^a \frac{-F(x)g(x)}{y(x)-F(x)}\,dx,$$

所以若 α 增加，则 $\int_{AD} d\lambda$ 减少(对于固定的 x, $y(x)$ 随 α 增加)。同样 $\int_{EC} d\lambda$ 也减少。从图 5.6 由于

$$\alpha<\alpha'\to\int_{D'E'} d\lambda<\int_{DE} d\lambda,$$

所以 $\int_{DE} d\lambda$ 也减少。結果可知 $\alpha>a$ 时，$\varphi(\alpha)$ 是减函数。其次，$\alpha\to+\infty$ 时，$\varphi(\alpha)\to-\infty$。取 b 使 $a\leqslant b<\alpha$，作直綫 $x=b$，它与軌道 AB 的交点取作为 $R(b, r)$，则

$$-\int_{DE} d\lambda>-\int_{RBS} d\lambda=-\int_{RBS} F(x)\,dy\geqslant F(b)r❷.$$

此处 $\alpha\to+\infty$ 时 $r\to+\infty$，可是 $\int_{DE} d\lambda\to-\infty$ 即 $\varphi(\alpha)\to-\infty$。由以上可知，滿足 $\varphi(\alpha_0)=0$ 的 α_0 唯一地存在。通过点 $(\alpha_0, F(\alpha_0))$ 的軌道是唯一的极限环。又因

$$\alpha<\alpha_0\to\varphi(\alpha)>0\to\lambda_C>\lambda_A,$$
$$\alpha>\alpha_0\to\varphi(\alpha)<0\to\lambda_C<\lambda_A,$$

所以很明显，这个极限环是稳定的。

---

❶ 閉軌道对原点是对称的。——校者注

❷ 式中等号在原书中为“>”。——校者注

§6 負阻尼和自激振动

Liénard 方程的一个特殊情形是

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=0, \tag{6.1}$$

或

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0 \tag{6.2}$$

(如将后者微分1次，并将 $\dot{x}$ 改写为 x, 就得前者，其中 $F(x)$ 与 Liénard 方程中的 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ 滿足同样条件)。取这个方程作为自激振动的一个典型是适当的。实际上，可由这个方程說明的电气的或机械的自激振动的例子非常多。(6.2) 中的阻尼系数

$$F'(\dot{x})=f(\dot{x})$$

当 $|\dot{x}|$ 小时为負 (因 $f(0)<0$)，这是所謂**負性阻尼**或**負 阻 尼**；当 $|\dot{x}|$ 大时阻尼系数为正。若阻尼項的阻尼系数为正，則振动系統的能量在散失，这項系数为負时，振动系統由外部供給能量。設 x 的变化是振动的，且在系統的一个来回振动中間进入的能量和輸出的能量平衡，这个振幅是定常振动的振幅。定常振幅是由大的振动逐漸减衰，或小的振动逐漸增长到达定常振动时的振幅。这个定常振动与初始条件无关。

設阻尼項通过振动系統出入的能量和振动系統儲存的能量比較起来十分小，波形接近于正弦波，周期大体相等于固有周期。

产生自激振动的电回路一般称为**振蕩器**。

例 1 有摩擦的表面和另一物体完全接触时，相对速度 (v) 和摩擦力 (f) 間的关系一般是复杂的，大体如图 6.1 所示。如图 6.2，在向右方以一定速度 (v_0) 走动的台上，有一物体 (质量为 m) 与彈簧 (彈性常数为 k) 相連結。物体的运动方程是

$$m\ddot{x}+kx+f(\dot{x}-v_0)=0.$$

此处設

$$\xi=x+f(-v_0)/k,$$

則

$$m\ddot{\xi}+F(\dot{\xi})+k\xi=0, \tag{6.3}$$

其中
$$F(\dot{\xi})=f(\dot{\xi}-v_0)-f(-v_0).$$

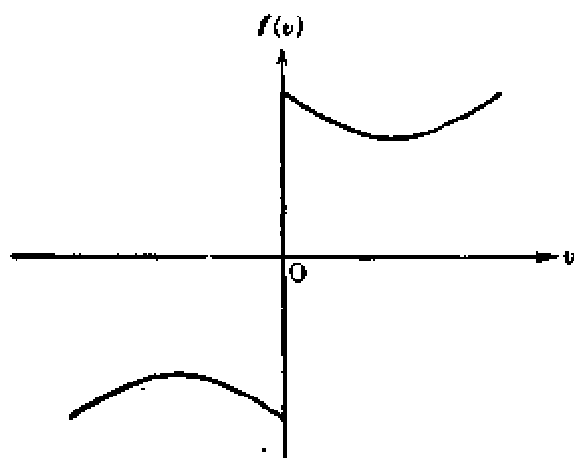


图 6.1

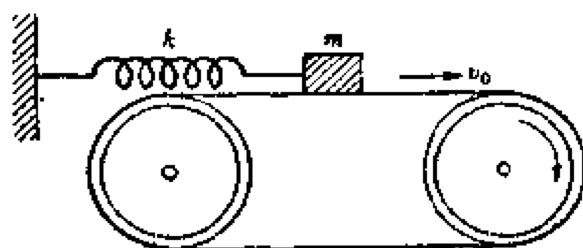


图 6.2

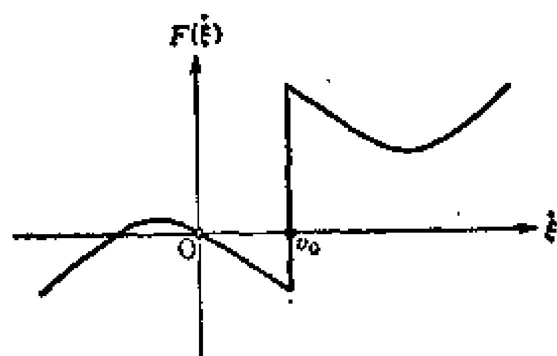


图 6.3

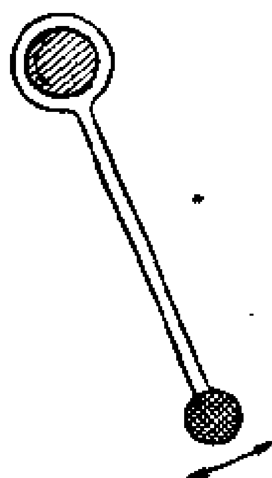


图 6.4

由图 6.3 知道，若給 v_0 适当的值而(6.3)中 $|\dot{\xi}|$ 不大时，就得到負性阻尼($F'(0)<0$)，因而这物体作自激振动。这种自激振动叫做**摩擦振动**；在潤滑不好的軸承、联軸器以及有滑动面的机械里，經常軋軋发声，因而知道这种振动。

在轉动軸上装一个摆(**Froude 摆**，图 6.4)，适当地給軸一定的轉动，就发生振动。这説明軸和摆的連結部分之間有負摩擦而产生摩擦振动。

例 2 在四极电子管里，如果帘栅电压比阳极电压高，阳极发出第二次电子，因而阳极电压(E)对阳极电流(I)的特性如图 6.5 所示，它具有負阻尼(四极管負阻特性)。如果在阳极和阴极之間联以并联的諧振回路(图 6.6)，則由

Kh 法則，

$$\int i_C dt = Cv,\quad Li_L = v,\quad Ri_R = v,$$

$$I = -i_C - i_L - i_R = f(v+E_0)❶.$$

从而这回路的微分方程是

$$LC\ddot{i}_L + \left[\frac{L}{R}\dot{i}_L + f(L\dot{i}_L + E_0)\right] + i_L = 0.$$

此处設 $x = i_L + f(E_0)$，則

$$LC\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0, \tag{6.4}$$

其中

$$F(\dot{x}) = LR^{-1}\dot{x} + f(L\dot{x} + E_0) - f(E_0).$$

从而如果条件(振蕩条件)

$$F'(0) = LR^{-1} + Lf'(E_0) < 0,$$

图 6.5

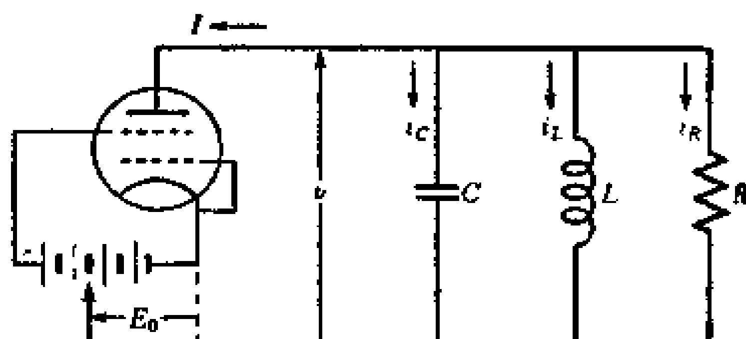


图 6.6

即 $R^{-1} + f'(E_0) < 0$ 能被滿足，回路就发生振蕩。这种振蕩器叫**四极管振蕩器**(Dynatron 振蕩器)。

例 3 前一例是直接利用負阻尼的振蕩器，其实用等效的柵极控制电子管也可以实現振蕩，例如三极管的控制电压(或集总电压 E_d) 对阳极电流(I_p)的特性如图 6.7。在此 $E_d = E_g + DE_p$，E_g 为柵极电压，E_p 为阳极电压，D 为正的常数。利用三极管的这种特性，对于图 6.8 中的回路可得(忽略柵极电流)

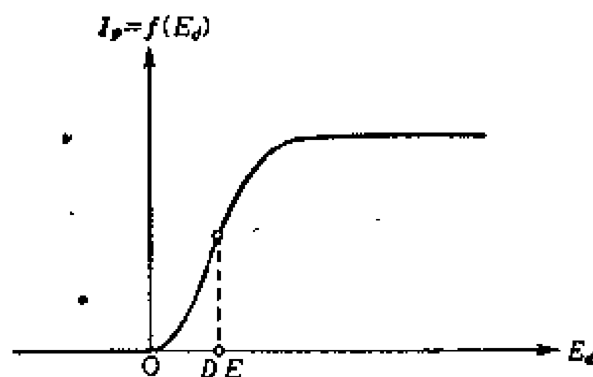


图 6.7

$$L\dot{i}_L = v,\quad \int i_C dt = Cv,\quad Ri_R = v,$$

❶ 原书为 $I = i_C - i_L - i_R = f(v + E_0)$.——校者注

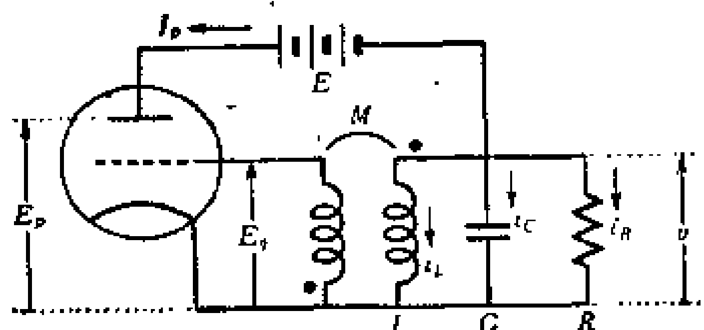


图 6.8

$$I_p=-i_L-i_C-i_R=f(E_g),$$
$$E_g=-M\dot{i}_L \quad (M>0),$$
$$E_p=E+v.$$

从而回路的微分方程是

$$LC\ddot{i}_L+\left[\frac{L}{R}\dot{i}_L+f(DE-(M-DL)\dot{i}_L)\right]+i_L=0.$$

此处設

$$x=i_L+f(DE),$$

則得

$$LC\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0, \qquad (6.5)$$

其中

$$F(\dot{x})=LR^{-1}\dot{x}+f[DE-(M-DL)\dot{x}]-f(DE).$$

从而 $F'(0)<0$，即

$$LR^{-1}<(M-DL)f'(DE).$$

就是振蕩条件。此种振蕩器叫阳極同步振蕩器。

設这电子管的特性用三次式

$$I_p=f(E_g)=f(DE)+\alpha(E_g-DE)-\beta(E_g-DE)^3 \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$$

来表示，振蕩条件

$$\alpha(M-DL)>LR^{-1}$$

被满足时，(6.5)是

$$y''+\mu(-1+y'^2)y'+y=0 \quad (\mu>0), \qquad (6.6)$$

其中

$$t=\sqrt{LC}\,\tau,\ [\alpha(M-DL)-LR^{-1}]/\sqrt{LC}=\mu,$$
$$x=[\sqrt{LC}\sqrt{\alpha(M-DL)-LR^{-1}}/\sqrt{\beta(M-DL)}(M-DL)]y,$$
$$y'=dy/d\tau,$$

又如設❶

$$v=[L\sqrt{\alpha(M-DL)}-LR^{-1}/\sqrt{3\beta(M-DL)}(M-DL)]z,$$

則方程可写为

$$z''+\mu(-1+z^2)z'+z=0 \quad (\mu>0). \tag{6.7}$$

例 4 电弧或氖气管的电流(I)对电压(E)的特性如图 6.9 所示，它表現出負阻尼。将串联的諧振回路和固定电流（电流为 i_0）的电源并联起来（图 6.10），則

$$E=f(I)=L\dot{i}+ri+e_C,$$

$$Ce_C=\int idt, \quad I=i_0-i.$$

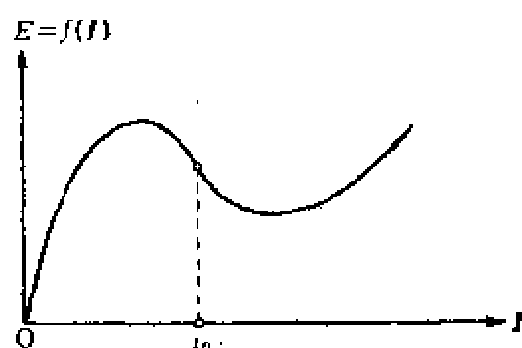


图 6.9

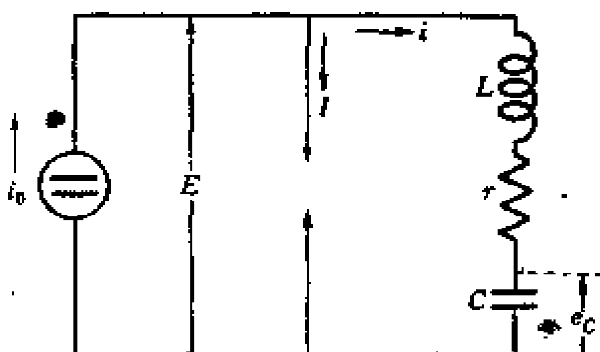


图 6.10

因而回路的微分方程为

$$LC\ddot{e}_C+[rC\dot{e}_C-f(i_0-C\dot{e}_C)]+e_C=0.$$

此处設 $x=e_C-f(i_0)$，則

$$LC\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0, \tag{6.8}$$

其中

$$F(\dot{x})=rC\dot{x}-f(i_0-C\dot{x})+f(i_0).$$

如果

$$F'(0)=rC+Cf'(i_0)<0,$$

卽若 $r+f'(i_0)<0$,則这回路发生振蕩。**Poulsen 电弧振蕩器**卽基于这原理。

例 5 考慮一个給水系統，其中用离心式水泵从大貯水池吸水到水槽，再由此水槽供給一定流量 Q_0（图 6.11）。設单位时間內通过水泵的水量为 Q，卽 Q 代表水泵管路中水的速度。通过水泵的流量为 Q 时，这水泵将水提高 $H=f(Q)$。Q 和 H 的关系可用曲綫表示，称为水泵水头流量曲綫，如图 6.12

❶ 由于 $v=Li_L=L\dot{x}=\sqrt{L/C}\,dx/d\tau$，这里的 $z=\sqrt{3}\,y'$。——校者注

所示。設在某一时刻水泵的流量为 Q，水槽的水位高 h. 水泵工作流量 Q 的水头 $f(Q)$ 和 h 的差，可以用来加速水泵管路中的水。如 m 代表水泵管路中的惯性，则

$$m\dot{Q}=f(Q)-h.$$

另一方面，由水泵送出的量 Q 比由水槽流出的量 Q_0 大，这个差 $Q-Q_0$ 使得积

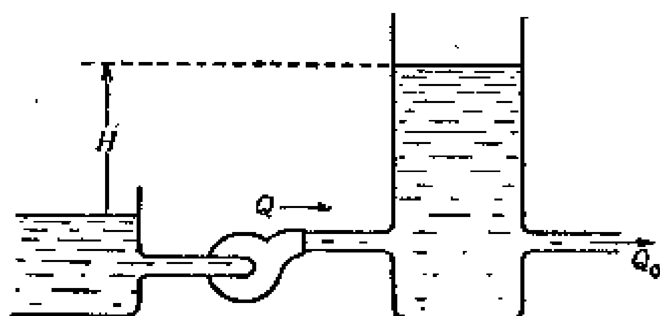


图 6.11

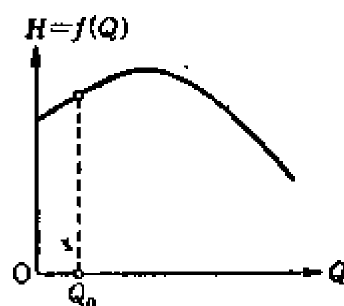


图 6.12

蓄在水槽內的水的高度 h 增高。設水槽的断面面积为 A，则

$$A\dot{h}=Q-Q_0.$$

若由以上两式消去 Q 则有

$$mA\ddot{h}-f(Q_0+A\dot{h})+h=0.$$

此处設 $x=h-f(Q_0)$，则

$$mA\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0, \tag{6.9}$$

其中

$$F(\dot{x})=f(Q_0)-f(Q_0+A\dot{x}).$$

所以，在

$$F'(0)=-Af'(Q_0)<0,$$

即在 $f'(Q_0)>0$ 的情况(即在 Q_0 较小的情况)产生自激振动。这种自激振动称为浪涌(surging)。大型气槽和离心式鼓风机相連結时的浪涌具有同样的机构。

例 6 均匀流动气流中的机翼，在气流的垂直方向产生的振动叫颤振(flutter)。如图 6.13，考虑机翼在气流中上下方向的运动，气流具有一定的速度 V，攻角为 θ_0. 設机翼向上运动，速度为 $\dot{x}$，它受到向下吹的相对气流(风)❶，于是攻角有了微小的变化，成为

$$\theta=\theta_0-\tan^{-1}(\dot{x}/V).$$

---

❶ 气流相对于机翼的速度是向左下方，倾斜角为 $\tan^{-1}(\dot{x}/V)$。——校者注

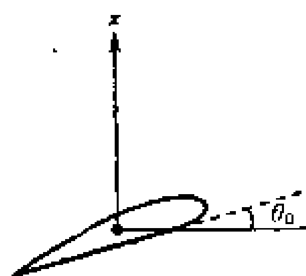


图 6.13

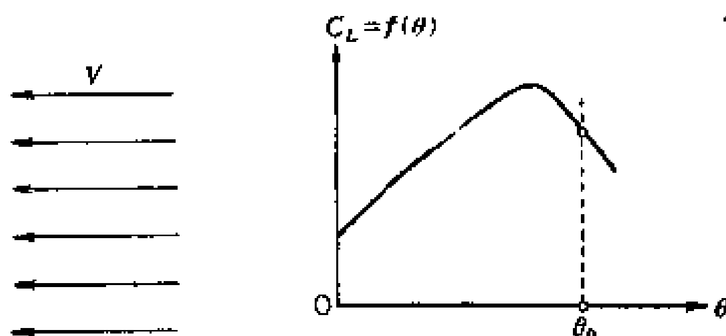


图 6.14

升力系数 C_L 和攻角 θ 的关系一般如图 6.14 所示。如果把机翼的惯性力 $(-m\ddot{x})$，恢复力 $(-kx)$ 和升力都考虑在内，则动平衡方程为

$$m\ddot{x}=Df(\theta)-kx,$$

这里 D 是正的常数。設 $\xi=Dk^{-1}f(\theta_0)-x$，則有

$$m\ddot{\xi}+F(\dot{\xi})+k\xi=0, \tag{6.10}$$

其中 $F(\dot{\xi})=Df[\theta_0+\tan^{-1}(\dot{\xi}/V)]-Df(\theta_0)$。因此，若 $F'(0)=DV^{-1}f'(\theta_0)<0$，卽若 $f'(\theta_0)<0$，則机翼发生自激振动。图 6.14 中負斜率的部分相应于引起失速的攻角范圍。这种自激振动叫做**机翼的失速顫振**。

輸电綫上結了冰，断面不再是圓形，它在横向风力作用下发生上下的自激振动。这种現象叫做**奔馳**(galloping)❶ **或舞动**，它是基于同样的振动机构。

§7 不連續系統

在前面討論过的情形中，$P(x, y)$，$Q(x, y)$ 在全平面上是解析的，(1)式的平衡点是孤立的，現在考虑这些条件不再成立的場合。当然，对于这种場合中的某些区域，其中 P, Q 是解析，且平衡点孤立，前述方法也还能应用。

相平面上可能有几个这样的区域(在每个区域中 P, Q 为解析且平衡点孤立)，在許多有意义的实际問題里都有这种情况。在这种区域的边界綫上，P 或 Q 一般地沒有定义。微分方程在各个区域内确定相点的运动，所以在每一邻域内相点沿着軌道到达边界，

❶ 亦有譯为"跳跃"的。——校者注

这以后的运动就必須用某些条件(物理的条件)来决定。即在这种場合中，微分方程和"連接条件"一起才完全决定了相点的运动。

这样决定的相点运动 $(x(t), y(t))$ 对于时間 t 可能是連續的也可能是不連續的。下面的例1是 x, y 都連續的減衰振动，例2是 x, y 都連續的自激振动，例3是 x 連續而 y 不連續的自激振动，例4是 x, y 都不連續的自激振动。

例1 考虑在摩擦面上被彈簧(彈性常数 k)支持的物体(質量 m)的振动(图7.1)。物体的速度($\dot{x}$)和摩擦力的关系假定如图7.2，即 $\dot{x}>0$ 时，摩擦力 $f=f_0$(正常数)；$\dot{x}<0$ 时，$f=-f_0$；$\dot{x}=0$ 而外力比 f_0 小时，則 f 与外力相等(方向相反)，而当外力比 f_0 大时，則 f 与 f_0 相等。这系統的方程为

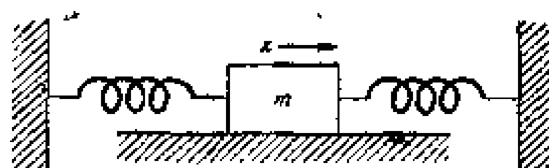


图 7.1

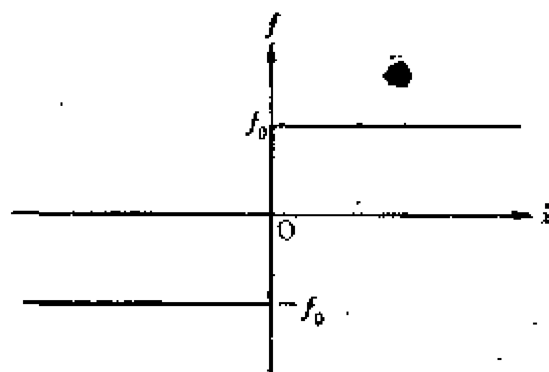


图 7.2

$$m\ddot{x}=\begin{cases}-kx+f_0 & (\dot{x}<0),\\ -kx-f_0 & (\dot{x}>0),\\ 0 & (\dot{x}=0,\ k|x|\leqslant f_0),\\ -kx+f_0 & (\dot{x}=0,\ kx>f_0),\\ -kx-f_0 & (\dot{x}=0,\ kx<-f_0).\end{cases} \tag{7.1}$$

取 $\dot{x}=y$，則可写成(1)式的形式，其中 $Q(x, y)$ 在 x 軸上不連續。平衡点$(P=Q=0)$是 $y=0$，$k|x|\leqslant f_0$，即 x 軸上線段

$$-f_0\leqslant kx\leqslant +f_0$$

上的各点。在 y 为正的区域和 y 为負的区域分别积分，則得两个半橢圓

$$y<0,\quad \frac{k(x-f_0/k)^2}{R_1^2}+\frac{my^2}{R_1^2}=1,$$

$$y>0,\quad \frac{R(x+f_0/k)^2}{R_2^2}+\frac{my^2}{R_2^2}=1,$$

这里 R_1, R_2 是积分常数。

这种情况中的連接根据下列物理条件：若物体受到有限力的作用，则其动量$(m\dot{x})$随时間連續地变化。因此物体的动能$\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$的变化也是連續的。由以上条件，位置的变化当然也是連續的。从而在这种情况，位能$\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$的变化也是連續的。

按照以上，相平面上相点的运动如图7.3所示。相点沿着旋渦式地縮小的軌道运动到达O_1O_2上的平衡点而靜止下来，这里O_1为$(-f_0/k, 0)$，O_2为$(f_0/k, 0)$，这种平衡点显然是稳定的。

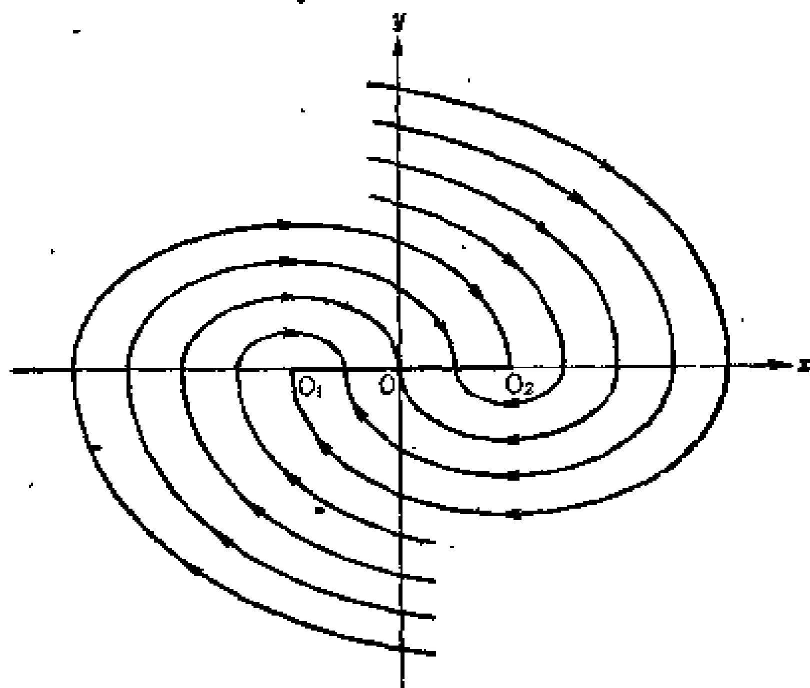


图 7.3

在綫段O_1O_2上的平衡点（除去原点O以外）所对应的相点，現在考虑加上一个一定大小的正向冲量或負向冲量。对于冲量的处理通常有两种方法：一种是认为冲量作用前后动量的变化是一定的（設冲量作用前和作用后的速度各为v_0，v_1，則$mv_1-mv_0=$常数）；另一种则认为冲量作用前后动能的变化是一定的$\left(\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\text{常数}\right)$。总之，冲量作用到物体上时，物体的速度有一定的、不連續的变化。今在图7.4中平衡点$(x_1, 0)$处的相点作用一个冲量，于是它的y坐标突然改变为$\pm y_1$（这里y_1是一个正的小量）。由$(x_1, +y_1)$出发的相点回到$(x_1, 0)$右側的平衡点，而由$(x_1, -y_1)$出发的相点則回到$(x_1, 0)$左側的平衡点。由于上半椭圓的方向和下半椭圓的方向之間有急剧的变化，所以由$-y_1$接近原点(O)的量比由$+y_1$离开原点O的量来得大。

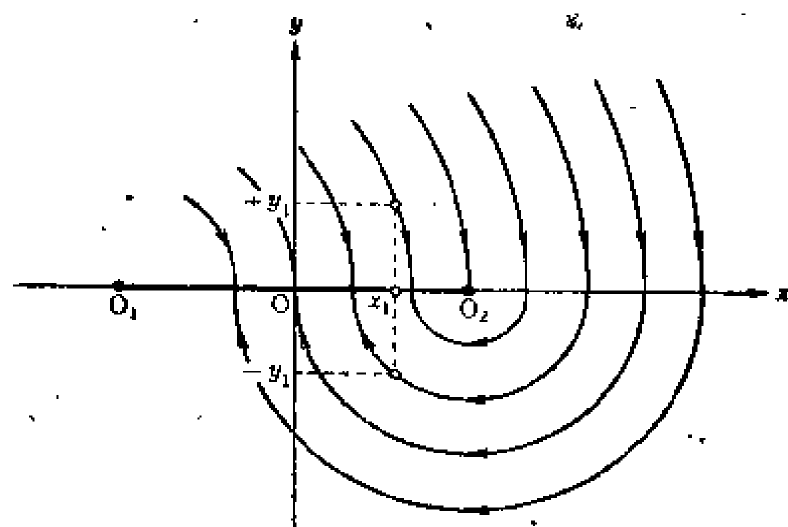


图　7.4

因此，象这样把冲量接連不断地加上，相点就漸漸向左方移动，終于到达平衡点(原点)。这可用来消除量测仪器和指示器由摩擦而产生的視平衡，得到眞正的平衡❶。

例2　考虑阳极同步振蕩器(图7.5)。忽略柵流。設諧振回路中电流为 x，由Kh法則(取 L 的电阻为 R)，則有

$$L\dot{x}+Rx+C^{-1}\int(x-I_p)\,dt=0.$$

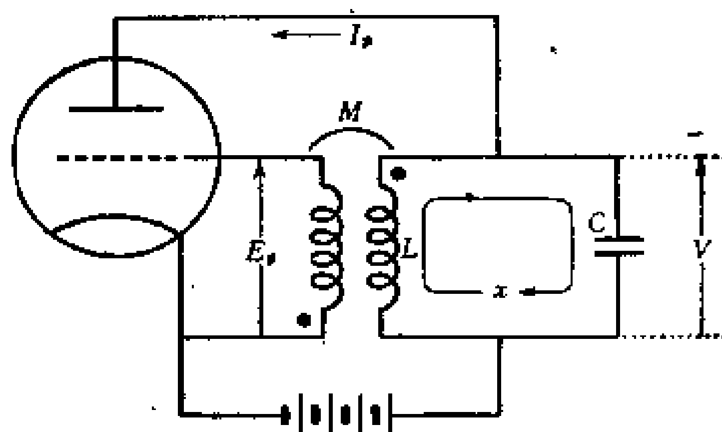


图　7.5

若假定阳极电流(I_p)仅和柵压 $E_g=M\dot{x}$ ($M>0$) 有关，其特性为 $I_p=f(E_g)$，則方程可写为

$$L\ddot{x}+R\dot{x}+C^{-1}x=C^{-1}f(M\dot{x}).\qquad(7.2)$$

对这个特性作如下假定，当 $E_g>0$ 則 $I_p=I_s$(称为飽和电流，是一个正的

❶　这样的討論不完全确切。事实上，如果冲量有一定的值($y_1\neq0$)，在物体上連續地施加正向和負向的冲量，可以使相点漸漸接近于原点 O，但不一定剛好到达 O 点。如果来回作用的冲量反复不停，相点的軌道就无限接近于一个周期解，其振幅为 $my_1^2/4f_0$。可見，将量測仪器或指示器不断地来回搖动，可以使它的指針回到眞正的平衡位置 O 点附近；搖得越輕，結果将越准。——校者注

常数)，当 $E_g<0$ 則 $I_p=0$(图 7.6)。設

$$\omega_0^2=1/LC,\quad h=R/2L,$$

則(7.2)化为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega_0^2x&=\omega_0^2I_s\quad(\dot{x}>0),\\&=0\qquad\ (\dot{x}<0).\end{aligned}\right\}\ (7.3)$$

图 7.6

和例1一样，考虑 $y=\dot{x}$ 为正的区域和 y 为負的区域。假定 $\omega_0>h$ (振动性的)，$\omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}$。(7.3)的第二式給出 x 由极大变化到极小，极大值的振幅和极小值的振幅比为 e^{hT}($T=\pi/\omega$ 是由极大到极小的时間)。另一方面由(7.3)的第一式，取 $x=I_s+\xi$，就和第二式一样❶。这 ξ 的极小值的振幅和极大值振幅的比也为 e^{hT}。

这里連接由下列物理条件确定：电容器的电荷(q)和电感的磁通量(ϕ)随时間連續地变化。設电容器(C)的端电压为 $V=q/C$，流过电感(L)的电流 i 为 $i=n\phi/L$ (n 是線圈的圈数)，則由以上条件同时有以下类似的条件：电容器的端电压(V)和流过电感(L)的电流(i)的变化是連續的。因此，电容儲存的能量 $\frac{1}{2}CV^2$ 和电感儲存的能量 $\frac{1}{2}Li^2$ 連續地变化。

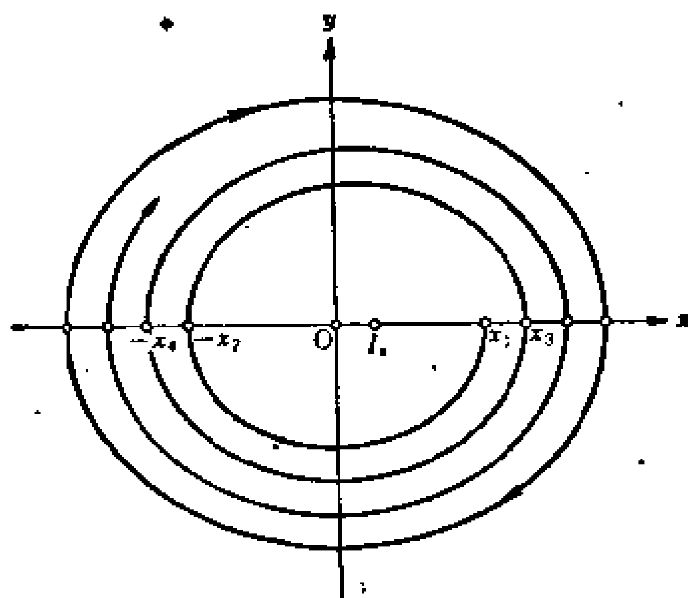


图 7.7

在这系統中，由于 x 和 $\dot{x}$ 連續变化，所以

$$CV=q=\int(x-I_p)\,dt,$$

$$V=-n\dot{\phi}-Rx,\quad n\phi=Lx$$

的变化也是連續的。

現在設某一时刻相点在某一点 $(x_1,0)$ $(x_1>0)$ 处(图7.7)，它按顺时針向在 $y<0$ 的区域内轉到与負的 x 軸相交。如相交点坐标为 $(-x_2,0)$ 則 $x_1/x_2=e^{hT}$。其次，由这点出发的相点按顺时針向在

❶ 变量为 ξ.——校者注

$y>0$ 的区域轉到再次与正的 x 軸相交。如交点坐标为 $(x_3, 0)$，則

$$(x_2+I_s)/(x_3-I_s)=e^{hT}.$$

由这两个式子得

$$x_3=x_1e^{-2hT}+I_s(1+e^{-hT}).$$

設 $e^{-2hT}=\lambda<1$，$I_s(1+e^{-hT})=\mu$，則

$$x_3=\lambda x_1+\mu.$$

一般地有

$$x_{2k+1}=\lambda x_{2k-1}+\mu.$$

因 $0<\lambda<1$，所以当 $k\to\infty$ 时❶，

$$x_{2k+1}\to x_0=\mu/(1-\lambda)=I_s/(1-e^{-hT}).$$

完全同样，

$$x_{2k}\to\bar{x}_0=x_0e^{-hT}.$$

即这相点漸近于一个稳定的极限环。系統(7.3)是自激振动的表現形式。

例3　钟表通常是由振动系統(摆等)、能源(悬錘，发条等)和联結这两者的控制装置(擒纵机构)❷三部分組成。控制装置通过冲量的形式将能源中儲存的能量周期地轉送进振动系統。由于冲量进入的时刻只决定于振动系統的状态(例如摆的位置)，所以钟表是一种机械的自激振动系統。

对冲量的处理方法如例1所述，在此考虑后者，即在冲量前后动能变化一定(实际上悬錘是钟表的能源，冲量的数量和摆錘下降距离，即位能的减少成比例)。将钟表机构进行这样簡化后，它的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+x&=-f_0 \quad (\dot{x}>0),\\ &=+f_0 \quad (\dot{x}<0).\end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

設冲量在 $x=-f_0$ $(\dot{x}>0)$ 的瞬时施加，此时(取 $\dot{x}=y$)加入振动系統的动能为 $y_1^2-y_0^2=h^2$。若令

$$a=y_1-y_0=\sqrt{y_0^2+h^2}-y_0,$$

則 y_0 和 a 的关系如图7.8。相平面(图7.9)的軌道是由以 $O_1(-f_0, 0)$ 为中心的圓周的上半部和以 $O_2(+f_0, 0)$ 为中心的圓周的下半部組成。

在图7.9中，由点 $(-x_0, 0)$ 出发的相点，在以 O_1 为中心、R_0 为半徑 $(R_0=x_0-f_0)$ 的圓周上向右轉 $90°$ 与半直綫 $x=-f_0$，$y>0$ 相交。在到这交点 $(x=-f_0, y=y_0)$ 的瞬間，相点向上跳跃 a 到点 $(x=-f_0, y=y_0+a)$，这次

❶ 不难由数学归納法証明：$x_{2k+1}=\lambda^k x_1+(1-\lambda^k)\mu/(1-\lambda)$。——校者注

❷ 俗称擒馬。——校者注

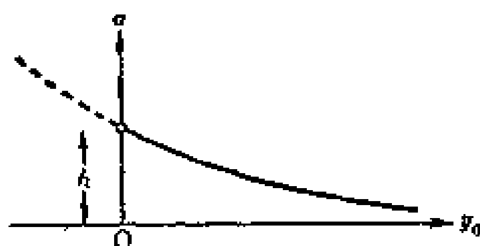


图 7.8

再沿着以 O_1 为中心、$R_1(R_1^2-R_0^2=h^2)$ 为半徑的圓周上向右轉 90° 与 x 軸交于 $(x_1, 0)$ $(x_1=R_1-f_0)$. 接着，相点从这交点沿着以 O_2 为中心、$R_2(R_2=R_1-2f_0)$ 为半徑的圓周上轉过 180° 与 x 軸相交于点 $(-x_2, 0)$ $(x_2=R_1-3f_0)$. 由以上得下列关系:

$$(x_2+3f_0)^2-(x_0-f_0)^2=h^2. \tag{7.5}$$

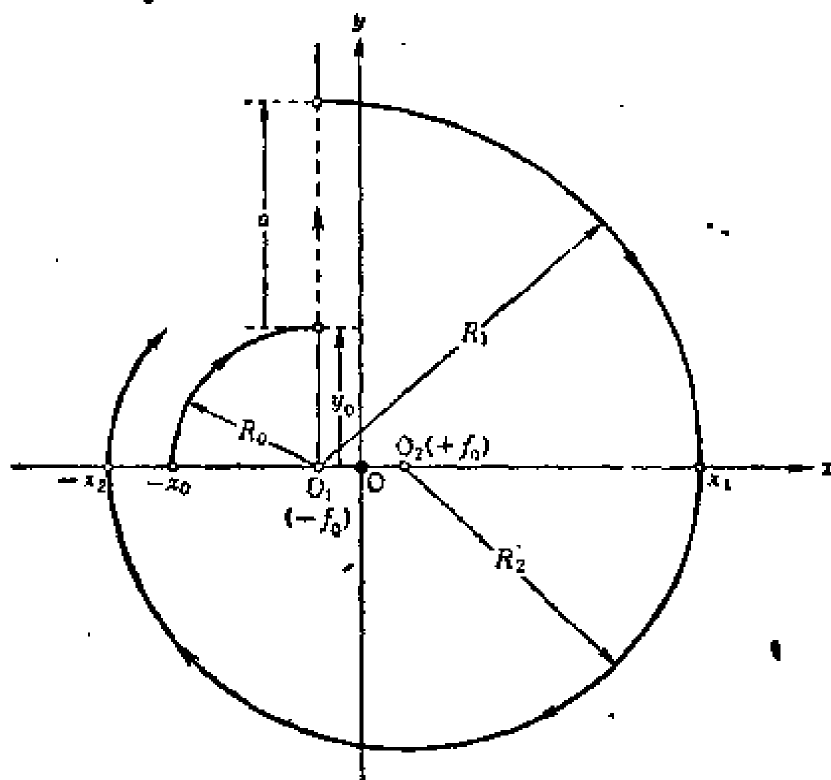


图 7.9

周期运动对应于 $x_2=x_0$, 亦即 $x_0=h^2/8f_0-f_0$. 为了得到周期運动必須 $x_0>f_0$ (若 $x_0\leq f_0$ 則 $(-x_0, 0)$ 在平衡状态的綫段上), 所以 $h^2>16f_0^2$ 是必要的。上面說明在摩擦力 f_0 較大的钟表中, 钟表能源也要强那么多。在这条件被滿足时, 就不依初始条件而有唯一的周期运动存在。設令 $\bar{x}=h^2/8f_0-f_0$

和 $x_{2n}-\bar{x}=y_n(n=0,1,2,\cdots)$，則(7.5)（把 y_0 取作 y_n）❶ 可写成为

$$y_{n+1}^2+2\alpha y_{n+1}=y_n^2+2\beta y_n, \tag{7.6}$$

此处 $\alpha=h^2/8f_0+2f_0$, $\beta=h^2/8f_0-2f_0$ $(\alpha>\beta>0)$.

(7.6)两边的备解如图7.10，由于 $x_0>f_0$，故 $y_0>-\beta$，从而由图很明显 $y_n\to 0$. 所以，相平面上連續的变化和不連續的变化(跳跃)組合而成的这个周期运动显然是稳定的。

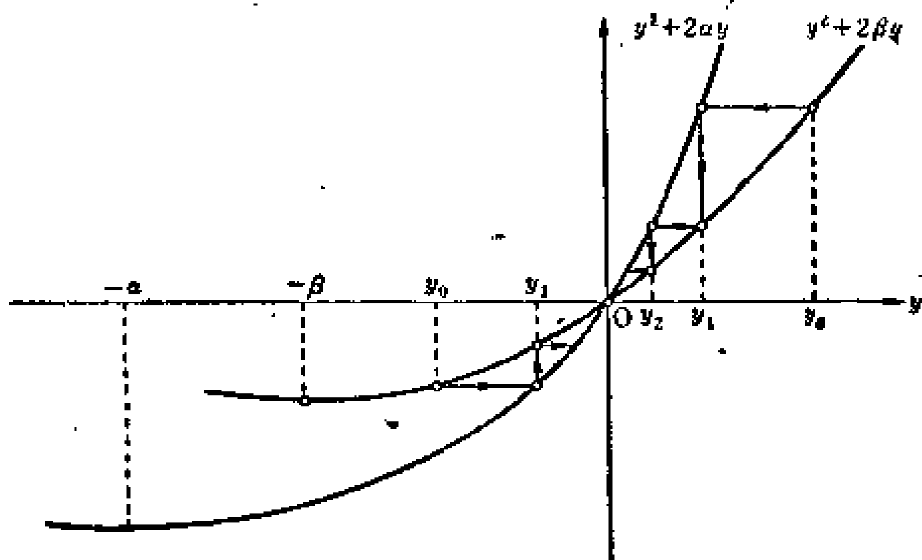


图 7.10

例4 考虑图7.11的回路(电感負荷的**多諧振蕩器**)。忽略对回路对称

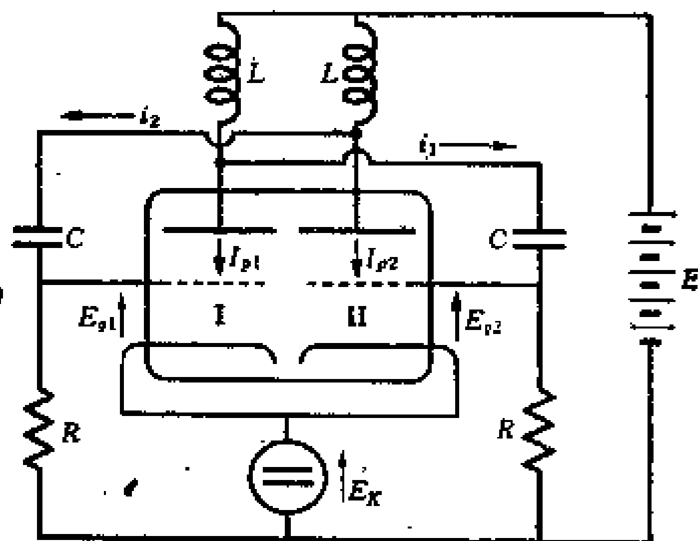


图 7.11

❶ 先將(7.5)写成 $(x_{2n+2}+3f_0)^2-(x_{2n}-f_0)^2=h^2$，再以 $\bar{x}$ 和 y_n 代入，得 $(y_{n+1}+\bar{x}+3f_0)^2-(y_n+\bar{x}-f_0)^2=h^2$，或 $(y_{n+1}+\alpha)^2-(y_n+\beta)^2=h^2$，化簡得(7.6)，因为 $\alpha^2-\beta^2=h^2$. ——校者注

的柵流，眞空管的特性表示为 $I_p=f(E_g)$，由 Kh 法則，

$$E_{g1}=Ri_2-E_K,\quad E_{g2}=Ri_1-E_K,$$

$$L(i_1+I_{p1})^{\cdot}+C^{-1}\int i_1dt+Ri_1=E=L(i_2+I_{p2})^{\cdot}+C^{-1}\int i_2dt+Ri_2.$$

这里对眞空管的特性作下列假定，

$$I_p=f(E_g)=f(Ri-E_K),$$

令 $I_{p0}=f(-E_K)$，并将 I_p 代之以

$$i_p=I_p-I_{p0}=f(Ri-E_K)-f(-E_K),$$

考慮 $I_{p0}=\varphi(Ri)$，$\varphi(x)$ 为滿足下列条件的解析函数：

$$\varphi(-x)=-\varphi(x),\quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\text{有限},$$

若 $0\leqslant|x_1|<|x_2|$，則 $0<\varphi'(x_2)<\varphi'(x_1)$.

此处特别考慮对称动作($i_1=-i_2$)的情形，取 $i=i_1=-i_2$，則得❶

$$L[1-R\varphi'(Ri)]\dot{i}+Ri+C^{-1}\int idt=E,$$

写成下列联立形式(取 $x=Ri$)：

$$\dot{x}=\frac{y}{\varphi'(x)-1/R},\quad \dot{y}=\frac{x}{CRL}+\frac{y}{L[\varphi'(x)-1/R]}.\tag{7.7}$$

若 $\varphi'(0)<1/R$，右边为解析函数，仅有原点为平衡点，它在

$$1/R-\varphi'(0)\geqslant 4L/CR$$

时为稳定的結点，在 $1/R-\varphi'(0)<4L/CR$ 时为稳定的焦点。沒有极限环，任意解当 $t\to+\infty$ 靠近原点(相点对于閉曲綫

$$CRLy^2+2\int_0^x(R^{-1}-\varphi'(x))xdx=\text{常数}$$

总是自外向内地穿过的)。

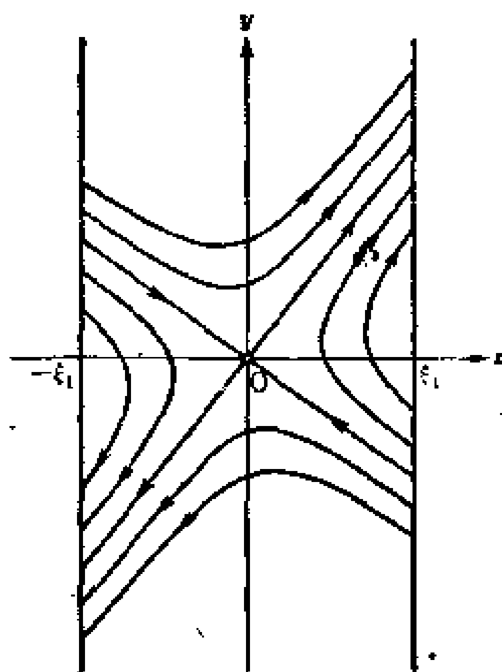


图　7.12

其次考慮 $\varphi'(0)>1/R$ 的情况。在平衡点仅为原点的情况中它是鞍点(图7.12)。注意到 $x=\pm\xi_1$ (其中 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(-\xi_1)=1/R$，$\xi_1>0$) 时 (7.7) 的右边分母为零。在此把(7.7)分作两个区域来考慮，$|x|>\xi_1$ 和 $|x|<\xi_1$。在前一区域内沒有平衡点也沒有周期解。在后

❶ 因 $i_1+i_2=0$，显然下式中的 $E=0$。——校者注

一区域内由于平衡点是鞍点所以沒有周期解。在此两区域的分界綫 $x=\pm\xi_1$ 处 x 和 y 变化速度成为无限大。这种情况的連接与例3一样，根据下面的物理条件，电容器的端压

$$C^{-1}\int idt=Ly-x+E,$$

和流过电感的电流：$i+I_p=xR^{-1}-\varphi(x)+I_{p0}$ 的变化是連續的，从而这分界綫上任一点 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1=\pm\xi_1)$ 处的相点在下一瞬間移至相点 $(x_2,\ y_2)$，这两对坐标間的 $Ly-x$ 和 $\varphi(x)-xR^{-1}$ 等值满足下列条件：

$$Ly_1-x_1=Ly_2-x_2,\quad \varphi(x_1)-x_1R^{-1}=\varphi(x_2)-x_2R^{-1}. \tag{7.8}$$

实际上，在这种場合由于 x 和 y 的值不連續地变化，所以这种連接条件叫作**跳跃条件**。这个系統的运动由微分方程(7.7)和跳跃条件(7.8)所决定。若将这跳跃条件考虑在内，含有跳跃的周期运动——不連續自激振动——就可能产生。以下具体地来确定象这样的周期运动。这种振蕩器称为**張弛振蕩器**。

对上述的 $\xi_2>0$ ❶，

$$\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi_2)=R^{-1}(\xi_1+\xi_2),$$

因而确定 $\xi_2>\xi_1$。又过 $(\xi_2,\ 0)$ 的軌道向 y 軸正方向进行与 $x=\xi_1$ 相交于 P_0，P_0 跳跃到 Q_0，其中 Q_0 是在过 P_0 方向系数为 $1/L$ ❷的直綫和直綫 $x=-\xi_2$ 的交点。此处分为以下各种情况：

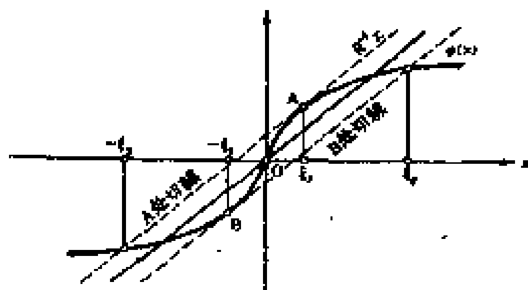
1) Q_0 的 y 坐标是負的情况。設 $Q_0=(-\xi_2,\ -a)$ $(a>0)$，过 (ξ_2,η) $(\eta\geqslant 0)$ 的軌道向左方向进行与 $x=\xi_1$ 的交点 P_η。由 P_η 跳跃到 Q_η，Q_η 的坐标为 $(-\xi_2,\ f(\eta))$。此时 $f(0)=a$；$f(\eta)$ 是在 $\eta\geqslant 0$ 定义的单調减少函数，由于

$$2L^{-1}\xi_2-\eta>f(\eta)\geqslant a-\eta,$$

所以满足 $f(\eta)=\eta$ 的 $\eta=\eta_0$ 存在且唯一；因而通过 $(\xi_2,\ \eta_0)$ 的不連續周期解

---

❶ 設 $x_1=\pm\xi_1$ 时，$x_2=\mp\xi_2$。ξ_1，ξ_2 的意义見下图。——校者注



❷ 这里和以下的 L，原书中均写成为 kL。——校者注

唯一地存在，任意其他的解当 $t\to+\infty$ 时收斂于这周期解。

2) Q_0 的 y 坐标为零的情况。采用和 1) 中同样的表示法，經过 $(\xi_2, 0)$ 的解是不連續的周期解，其他解当 $t\to+\infty$ 时收斂于这个不連續的周期解。

3) Q_0 的 y 坐标为正的情况。設 $Q_0=(-\xi_2, c)$ $(c>0)$，与 1) 一样，确定 P_η, Q_η, $Q_\eta=(-\xi_2, g(\eta))$。取过 Q_η 的軌道，假如向下方向进行，与 x 軸垂直相交于 $x=-\xi_2$；交点設为 $R_\eta=(-\xi_2, h(\eta))$。此时 $\eta\geqslant 0$ 对 $g(\eta)$，$h(\eta)$ 都是单调增連續函数，并且 $h(\eta)<g(\eta)$。另一方面，

$$\eta-g(\eta)<2L^{-1}\xi_2,$$

当 η 充分大时，

$$\eta-g(\eta)\approx 2L^{-1}\xi_2.$$

利用这关系則满足 $\eta=h(\eta)$ 的 $\eta=\eta_0$ 唯一存在。此时可証明其他任意解当 $t\to+\infty$ 时趋近于通过 (ξ_2, η_0) 的不連續周期解。

§8 結构稳定的系統

用(1)式表示物理現象时多少有些近似意义，所以，如在式子右边 P 和 Q 或多或少給予微小的变化，解的样子也不会变化很大。如果 P, Q 的微小变化就会使得解的样子全部变化，这样的方程不可能用来代表物理的現象。由于在物理現象中考虑的量（例如变位，电流等）在实际問題中不能取无限大的值，所以只須在相平面的有限部分来考虑这种变化。

設在相平面上某一有限区域内，对 (1) 式所表示的系統中的 P, Q 作微小变化，而軌道模样的拓扑特性并不变化，具有这样性质的系統叫作**結构稳定的**(structurally stable)系統❶。

这里略为詳細地說明一下。

光滑的簡单閉曲綫 C 圍成閉区域 G。微分方程(1)式的 P 和 Q 是定义在 G 上，連續且有連續偏导数。設 C 上的速度向量(其 x,y 分量分别为 P,Q)不和 C 相切，也不为 0 (即設在 C 上沒有平衡点)。因而可假設 C 上的速度向量全部是向內的，这并不失去一般性。

---

❶ 即粗糙系統 грубая система (А. А. Андронов 原来的用語)。——校者注

对于(1)式，考慮系統

$$\dot{x}=P(x, y)+p(x, y), \quad \dot{y}=Q(x, y)+q(x, y), \tag{8.1}$$

其中 p, q 連續且有連續偏导数。此时如下列条件能滿足，則系統(1)在 G 上为結构稳定的。

对任意的 $\varepsilon>0$，总有 $\delta(\varepsilon)>0$，使得在 G 內对任意函数 p, q（它們在 G 內具有連續的偏导数）滿足

$$|p|, |q|, |\partial p/\partial x|, |\partial p/\partial y|, |\partial q/\partial x|, |\partial q/\partial y|<\delta$$

时，存在一个拓扑变換 T 将 G 自身变到 G，而 (1) 式的軌道移至 (8.1) 的軌道，且滿足

$$\text{dist}\ (M, T(M))<\varepsilon \quad (M \text{ 为 } G \text{ 的任一点})。$$

可以証明，在区域 G 內結构稳定的系統具有下列性质（証略）：

1. 沒有高次平衡点($q=0$)，也沒有中心点($p=0,\ q>0$)；
2. 沒有連結鞍点和鞍点的軌道；
3. 閉軌道只不过有有限个；
4. 对周期为 L 的周期解，

$$\int_0^L([P_x]+[Q_y])\,dt\neq 0 [1].$$

逆之，也可以証明（証略）：

設 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 定义在由光滑简单閉曲綫 C 圍成的区域 G 上，具有連續的偏导数，向量 $(P(x, y),\ Q(x, y))$ 在 C 上不和 C 相切，而且 C 上沒有零向量，此时如果对 (1)式的解上述 1～4 成立，則(1)式是結构稳定的系統。

[1] [　]代表以周期解代入。——校者注

第2章　自治系統的解析方法

本章主要說明下列方程：

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\ \dot{x}) \quad (0<\mu\ll 1) \tag{2}$$

的解析处理方法。特别考虑这个形状的理由是：对 (1)式完全用一般統一的解析处理有困难；另一方面，在实际問題的方程 $\ddot{x}+f(x,\ \dot{x})=0$ 里，$f(x,\ \dot{x})$ 在很多情况接近于 k^2x❶，从而有各种有意义的非綫性現象显示为这种近乎綫性的情况。

§9 振动法❷

如第1章所叙述的，在(2)式的解中重要的是周期解，所以現在来說明它的实际求法。以后如沒有預先声明，(2)式的右边将取作为 x 和 $\dot{x}$ 的解析函数。

原来考虑的方法是将 x 展开为 μ 的冪級数

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\cdots,$$

将它代入(2)，比較 μ 的冪有

$$\ddot{x}_0+x_0=0, \quad \ddot{x}_1+x_1=f(x_0,\ \dot{x}_0),$$

$$\ddot{x}_2+x_2=f_x(x_0,\ \dot{x}_0)x_1+f_{\dot{x}}(x_0,\ \dot{x}_0)\dot{x}_1,\ \cdots.$$

由第一式 $x_0=A\sin(t-t_0)$．将它应用于第二式解 x_1；在确定 x_1 时，通常往往出現永年項 (secular term)，当 $t\to\infty$ 时，x_1 是发散的。現在所求出的 $x_0+\mu x_1$ 不可能很好地近似于周期解。譬如，$f(x,\ \dot{x})=-x$ 时，即 $\ddot{x}+(1+\mu)x=0$ 的解是

$$x=A\cdot\sin[\sqrt{1+\mu}(t-t_0)],$$

---

❶ 在(2)式中 $k^2=1$．如 $k^2\neq1$，可作代换 $t'=kt$．

❷ "Возмущение"，"perturbation" 通常在天体力学中譯为"攝动"，在原子力学中譯为"微扰"。这里的攝动法也称为小参数法。——校者注

而

$$x_0 = A\sin(t-t_0), \quad x_1 = \frac{A}{2}(t-t_0)\cos(t-t_0).$$

若(2)式有周期解，其周期一般与 μ 有关，考虑到这一点，并且为了使永年项不出现，有以下的方法。

設(2)式的周期解 $x(t)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$，其中 $\omega=\omega(\mu)$ 为未知，但 $\omega(0)=1$. 取 $\omega t=\tau$, $x(t)=\xi(\tau)$，則❶

$$\omega^2\xi''+\xi=\mu f(\xi, \omega\xi'), \tag{9.1}$$

其中 $\xi'=\frac{d\xi}{d\tau}$. 此处

$$\xi=\xi_0+\mu\xi_1+\mu^2\xi_2+\cdots, \tag{9.2}$$

$$\omega=1+\mu\omega_1+\mu^2\omega_2+\cdots, \tag{9.3}$$

代入(9.1)式，比較 μ 的同次冪：

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_0''+\xi_0=0,\\
&\xi_1''+\xi_1=-2\omega_1\xi_0''+f(\xi_0, \xi_0'),\\
&\xi_2''+\xi_2=-2\omega_2\xi_0''-\omega_1^2\xi_0''-2\omega_1\xi_1''\\
&\qquad\qquad+\xi_1 f_x(\xi_0, \xi_0')+(\xi_1'+\omega_1\xi_0')f_{\dot{x}}(\xi_0, \xi_0'),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

首先将第一式在初始条件

$$\xi_0(0)=A, \quad \xi_0'(0)=0$$

解之，得

$$\xi_0=A\cos\tau.$$

从而由第二式，

$$\xi_1''+\xi_1=2\omega_1 A\cos\tau+f(A\cos\tau, -A\sin\tau).$$

此处为了使 ξ_1 有以 2π 为周期的解，在右端項的 Fourier 展开中，$\cos\tau$ 和 $\sin\tau$ 的系数必須为零。于是

---

❶ 其实这里的 ξ 就是 x，只是表达为 τ 的函数。——校者注

$$\left.\begin{aligned}
&f(A\cos\tau,\ -A\sin\tau)\\
&\qquad=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(A)\cos n\tau+g_n(A)\sin n\tau],\\
&f_n(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(A\cos\tau,\ -A\sin\tau)\cos n\tau\,d\tau,\\
&g_n(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(A\cos\tau,\ -A\sin\tau)\sin n\tau\,d\tau.
\end{aligned}\right\}\tag{9.5}$$

此时

$$f_1(A)+2\omega_1A=0,\tag{9.6}$$

$$g_1(A)=0,\tag{9.7}$$

由此两关系式可确定 A 和 ω_1。

满足(9.7)的 $A(\neq 0)$ 确定后，代入(9.6)可确定 ω_1。

接着，求出 (9.4) 第二式的解。設初始条件为 $\xi_1(0)=A_1$(A_1 是一未定数)，$\xi_1'(0)=0$. 将它代入第三式右边。在此式右端的 Fourier 展开中，$\sin\tau$ 和 $\cos\tau$ 的系数为零，因而分別确定 A_1 和 ω_2. 实际上，$\sin\tau$ 的系数是(經过簡单計算可知在 $A\neq 0$ 时，$\int_0^{2\pi}f_{\dot{x}}(A\cos\tau,-A\sin\tau)d\tau+\pi[g_1'(A)+g_1(A)/A]=0$❶) $A_1g_1'(A)+P_1$ 的形式(其中 P_1 不含 A_1, ω_2)；另一方面，$\cos\tau$ 的系数是 $2\omega_2A+Q_1$ 的形式 (Q_1 不含 ω_2)，所以最后在条件 $Ag_1'(A)\neq 0$ 下确定 A_1. 其次象所希望的那样能够通过它来确定 ω_2. 再次，将(9.4)的第三式 $\xi_2(0)=A_2$ (A_2 未定)，$\xi_2'(0)=0$ 的解代入第四式的右边，其右边的 Fourier 展开关于 $\sin\tau$, $\cos\tau$ 的系数分别为

$$A_2g_1'(A)+P_2,\quad 2\omega_3A+Q_2$$

的形式，还在 $Ag_1'(A)\neq 0$ 的情形下来定

---

❶ 将全导数 $\frac{1}{A}\frac{d}{d\tau}(-f\cdot\cos\tau)=\frac{1}{A}f\cdot\sin\tau+f_x\cdot\sin\tau\cos\tau+f_{\dot{x}}\cos^2\tau\,d\tau$ 在 $\tau=0$ 到 2π 間积分，再以 $\cos^2\tau=1-\sin^2\tau$ 代入，注意到 $g_1'(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_x\cdot\sin\tau\cos\tau d\tau-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_{\dot{x}}\cdot\sin^2\tau\,d\tau$，可推导出这一等式。——校者注

$$A_2 = -P_2/g_1'(A), \quad \omega_3 = -Q_2/2A.$$

以下照样进行，最后对上法能有满足(9.7)和

$$Ag_1'(A) \neq 0 \tag{9.8}$$

的 A，順次地确定 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$. 对于这样确定的 $\xi_1, \xi_2, \cdots$，可以証明級数(9.2)在 μ 充分小时是收斂的（第4章，§17）。

例　$\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=0 \quad (0<\mu\ll 1)$.

$$g_1(A) = -A + A^3/4, \quad g_1(A) = 0 \to A = 2,$$

$$g_1'(A) = -1 + 3/4A^2 \to g_1'(2) = 2 \neq 0,$$

$$\xi_0 = 2\cos\tau, \quad \xi_1 = (3/4)\sin\tau - (1/4)\sin 3\tau,$$

$$\xi_2 = (-1/8)\cos\tau + (3/16)\cos 3\tau - (5/96)\cos 5\tau, \cdots,$$

$$\omega = 1 - \mu^2/16 + \cdots.$$

設 $f(x, \dot{x})$ 仍是关于 $\dot{x}$ 的偶函数。

$$f(x, \dot{x}) \equiv f(x, -\dot{x})$$

（不含 $\dot{x}$ 的情况也适用），則 $g_1(A) \equiv 0$, A 为任意的值。此时可从(9.6)确定 $\omega_1 (A \neq 0)$，于(9.4)的第二式在初始条件 $\xi_1(0) = \xi_1'(0) = 0$ 下解出。其次将已經确定的 ξ_0, ω_1, ξ_1 代入(9.4)第三式右边，右边的 Fourier 展开沒有 sin 的項，而仅有 cos 的項。因此令 $\cos\tau$ 的系数为零以确定 ω_2，一面将第三式在 $\xi_2(0) = \xi_2'(0) = 0$ 确定 ξ_2 的解。以后再同样进行，能順次确定 $\omega_3, \xi_3, \cdots$. 这种情况中，(9.2)在 μ 充分小时也收斂（証略）。

其次考虑周期解的**稳定性**。稳定的意义是§4的定义（軌道稳定）。在

$$f(x, \dot{x}) \equiv f(x, -\dot{x})$$

的情况中，由于一个周期解的邻近的解也是周期解，所以稳定性很明显。現在考虑 $g_1(A) = 0$, $Ag_1'(A) \neq 0$ 的情况，当 $g_1'(A) > 0$ 时周期解是稳定的，$g_1'(A) < 0$ 时不稳定。下面来証明。

設問題中的周期解 $x(t, \mu)$ 的周期为 $2\pi + \tau(\mu)$，由 Poincaré

判定条件(§4)，

$$\int_0^{2\pi+\tau(\mu)} f_{\dot{x}}[x(t, \mu), \dot{x}(t, \mu)]dt$$

为正或为負，相应于不稳定或稳定。由于这积分关于μ連續，所以在$\mu=0$时的值，即当

$$\int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}(A\cos t, -A\sin t)dt$$

为正或为負时，上述积分也相应地为正或为負。另一方面，由簡单計算❶可知

$$\int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}(A\cos t, -A\sin t)dt+\pi[g_1'(A)+g_1(A)/A]=0.$$

因而确定，在$A\neq0$, $g_1(A)=0$的情况中，$g_1'(A)>0$时稳定，$g_1'(A)<0$时不稳定。

上例(van der Pol 方程)的周期解是稳定的。

§10 平 均 法

首先将(2)式写成下列形式：

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-x+\mu f(x, y). \tag{10.1}$$

此处$\mu=0$时，取a, b为任意数，則有解

$$x=a\cos t+b\sin t, \quad y=-a\sin t+b\cos t.$$

因此在$\mu>0$的情况，考虑a, b为t的函数(常数变易法)，

$$x=a(t)\cos t+b(t)\sin t,$$
$$y=-a(t)\sin t+b(t)\cos t, \tag{10.2}$$

以此作为(10.1)的解，以定$a(t)$, $b(t)$.

由(10.1)，

$$\dot{a}\cos t+\dot{b}\sin t=0, \quad -\dot{a}\sin t+\dot{b}\cos t=\mu[f],$$

此处

❶ 見第43頁的注。——校者注

$$[f]=f(a\cos t+b\sin t,\quad -a\sin t+b\cos t),$$

将这改写成

$$\dot{a}=-\mu[f]\sin t,\quad \dot{b}=\mu[f]\cos t. \tag{10.3}$$

这个方程的求解一般是困难的，它右边是关于 t 以 2π 为周期的带有因子 μ 的周期函数。由于在 $\mu\ll 1$ 的情况中在一个周期間 a 和 b 的变化很小，

$$|a(t_2)-a(t_1)|\leqslant\mu\left|\int_{t_1}^{t_2}[f]\sin t\,dt\right|\leqslant\mu\int_0^{2\pi}|[f]|\,dt,$$

所以(10.3)的右边可认为含有常数 a, b. 在区間 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 将右边取平均值(平均法)，可得到下列近似方程：

$$\dot{a}=-\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f]\sin t\,dt,\quad \dot{b}=\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f]\cos t\,dt. \tag{10.4}$$

此处作极坐标变换

$$a=\rho\cos\theta,\quad b=\rho\sin\theta\quad(\rho>0),$$

由(10.4)得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=-\frac{\mu}{2}g_1(\rho)\\&=-\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos u,\ -\rho\sin u)\sin u\,du,\\\dot{\theta}&=\frac{\mu}{2\rho}f_1(\rho)\\&=\frac{\mu}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos u,\ -\rho\sin u)\cos u\,du.\end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

可是由于

$$x=\rho\cos(t-\theta),\quad y=-\rho\sin(t-\theta),$$

所以(10.5)是确定(2)式的解的振幅和位相变化的近似式。在 $g_1(A)=0$, $A>0$ 时，則对于 $\rho=A$, (10.5)的第一式被满足，现由第二式

$$\theta-\theta_0=\mu(2A)^{-1}f_1(A)(t-t_0),$$

从而得到(2)式的近似周期解

$$x = A\cos\{[1-\mu(2A)^{-1}f_1(A)]t-\theta_1\}.$$

在§9中(9.2)，(9.3)的x，ω各为

$$\xi_0 = A\cos\omega t,\quad \omega = 1+\mu\omega_1$$

(其中ω_1，A是由(9.6)，(9.7)所定)。至于其稳定性，则由(10.5)的第一式显然可见，当$g_1'(A)>0$时为稳定，$g_1(A)<0$为不稳定。这与§9得稳定的严格条件一致。

下面来解(10.5)。由第一式

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{g_1(\rho)} = -\frac{\mu}{2}(t-t_0),$$

因而确定$\rho=\rho(t)$。将它应用于第二式，可确定$\theta(t)$。由(10.5)的第一式，当$t\to\pm\infty$时ρ或者是0，或者无限地接近于对应某一个$A>0(g_1(A)=0)$的极限环。在有几个极限环的情况中，可知一般地稳定的环和不稳定的环交替地出現。

根据这种方法，(2)式中的$f(x,\dot{x})$不一定要求为x，$\dot{x}$的解析函数；也还可論述周期解以外的解。

例 1 $\qquad \ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=0 \qquad (0<\mu\ll 1).$

$$g_1(\rho) = -\rho+\rho^3/4,\quad f_1(\rho)=0,\quad \dot{\rho} = -\mu g_1(\rho)/2 = \mu(\rho-\rho^3/4)/2.$$

解出(当$t=t_0$时取$\rho=\rho_0$)，得

$$\rho = 2\rho_0/\sqrt{\rho_0^2+(4-\rho_0^2)\exp[-\mu(t-t_0)]}.$$

因此当$t\to+\infty$时，$\rho\to 2$。或当$t=t_0$时，$x=A$，$\dot{x}=0$，则

$$x = 2A\cos(t-t_0)/\sqrt{A^2+(4-A^2)\exp[-\mu(t-t_0)]}.$$

例 2 $\qquad \ddot{x}+\mu\dot{x}+x=\mu K(1+\operatorname{sgn}\dot{x}) \qquad (0<\mu\ll 1,\ K>0).$

$$g_1(\rho) = \rho-4K/\pi,\quad f_1(\rho)=0.$$

如$t=t_0$时$\rho=\rho_0$，则

$$\rho = \rho_0\exp[-\mu(t-t_0)/2]+4K\{1-\exp[-\mu(t-t_0)/2]\}/\pi.$$

因此当$t\to+\infty$时，$\rho\to 4K/\pi$。或当$t=t_0$时$x=A$，$\dot{x}=0$，则

$$x = B\cos(t-t_0),$$

$$B = A\exp[-\mu(t-t_0)/2]+4K\{1-\exp[-\mu(t-t_0)/2]\}/\pi.$$

例 3 $\quad \ddot{x}+\mu(K+H|\dot{x}|)\dot{x}+\omega^2 x=0 \qquad (0<\mu\ll 1,\ K>0,\ H>0).$

当$t=t_0$时，$x=A$，$\dot{x}=0$，则

$$x=\rho\cos\omega(t-t_0),$$

其中

$$\rho=A\exp[-\mu K(t-t_0)/2]/B,$$

$$B=1+8\omega HA\{1-\exp[-\mu K(t-t_0)/2]\}/3\pi K.$$

特别在 $K=0$ 时，

$$\rho=A[1+4\mu\omega HA(t-t_0)/3\pi]^{-1}.$$

例 4 考虑随着温度 (θ) 变化而电阻 (R) 也有显著变化的导体（其关系是 $R=\psi(\theta)$），当交流电 $i=i_0\sin\omega t$ 通过时电压对电流的特性。若导体的热容量为 D，Newton 冷却系数为 K，则热平衡方程为

$$D\dot{\theta}+K\theta=Ri^2=\psi(\theta)i_0^2(1-\cos 2\omega t)/2.$$

当导体的热时常数 (D/K) 比周期 (π/ω) 大得多时，由于右边最后项可以忽略；所以这平衡状态是

$$i_0^2=2K\theta/\psi(\theta),$$

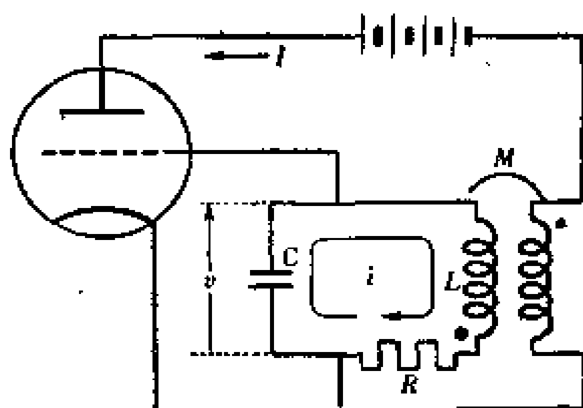


图　10.1

即导体的温度 (θ)（从而电阻 R）表示为交流振幅 i_0（乘 2）的函数。

如果把象这样的导体 (R) 用于栅极同步振蕩器（图 10.1），若忽略栅流，由 Kh 法則

$$v=L\dot{i}+Ri+M\dot{I}=-C^{-1}\int i\,dt.$$

若取电子管的特性（取綫性特性）为 $I=S(v+v_0)$ $(S,\ v_0$为正常数）則

$$LC\ddot{i}+(CR-MS)\dot{i}+i=0.$$

此处例如假定 $R=R_0+\sigma i_0^2$ $(\sigma>0)$，则振蕩条件为

$$MS-CR_0>0.$$

設 $t=\sqrt{LC}\,\tau$，$\sqrt{C\sigma}\,i/\sqrt{MS-CR_0}=x$，$(MS-CR_0)/\sqrt{LC}=\mu$（将 τ 改写为 t），则得到

$$\ddot{x}+\mu(-1+x_0^2)\dot{x}+x=0. \tag{10.6}$$

其中 x_0 为 i_0 的对应值，由于它近似地等于 ρ，所以(10.6)可写为

$$\ddot{x}+x=\mu(1-\rho^2)\dot{x}. \tag{10.7}$$

在 $\mu\ll1$ 的情况，由于 ρ 在一个周期間可視为常数，

$$g_1(\rho)=-(1-\rho^2)\rho,\quad f_1(\rho)=0.$$

$\rho=0$ 不稳定，$\rho=1$ 稳定，所以在 $t\to+\infty$ 时 $\rho\to 1$，即

$$i_0\to\sqrt{MS-CR_0}/\sqrt{C\sigma}.$$

由此可知，在这种情况振荡器的振幅是有限制的，这可以理解为由眞空管特性的非綫性抗阻 R 进行控制的。

§11 綫性化法

用在(10.5)中給出的 ρ，θ 得(2)式的近似解为

$$x=\rho\cos(t-\theta),\quad \dot{x}=-\rho\sin(t-\theta).$$

由于

$$f[\rho\cos(t-\theta),\quad -\rho\sin(t-\theta)]$$

的 Fourier 展开的基本諧波的項是

$$f_1(\rho)\cos(t-\theta)+g_1(\rho)\sin(t-\theta)\quad(f_1,\ g_1\ \text{由(9.5)給定}),$$

所以在(2)式中若将 $f(x,\dot{x})$ 代以 $f_1(\rho)x/\rho-g_1(\rho)\dot{x}/\rho$，則得

$$\ddot{x}+\mu\frac{g_1(\rho)}{\rho}\dot{x}+\left(1-\mu\frac{f_1(\rho)}{\rho}\right)x=0. \tag{11.1}$$

将这个**等价綫性方程**称为(2)式的**綫性化方程**。忽略 μ^2 以上的項，則容易确定(2)的近似解 $x=\rho\cos(t-\theta)$ 滿足这一方程。特别在

$$f(x,\dot{x})\equiv f(x,-\dot{x})$$

的場合中，$g_1(\rho)\equiv 0$，卽 ρ 是常数，綫性化方程是常系数的。

又若原方程为

$$\ddot{x}+\omega^2x=\mu f(x,\dot{x}).$$

設

$$f(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos u,\ -\rho\omega\sin u)\cos u\,du,$$

$$g(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos u,\ -\rho\omega\sin u)\sin u\,du,$$

由于取

$$\dot{\rho}=-\mu g(\rho)/2\omega,\quad \dot{\theta}=\mu f(\rho)/2\omega\rho,$$

所以給出綫性化方程为

$$\ddot{x}+\mu\frac{g(\rho)}{\omega\rho}\dot{x}+\left(\omega^2-\mu\frac{f(\rho)}{\rho}\right)x=0. \qquad (11.2)$$

以上的考虑，在含有非綫性項的系統大体上被看作发生正弦波振动的情况是有用的。如将非綫型項近似地代以适当的綫性項，可直接建立給定問題的正确方程，从而得到近似解。

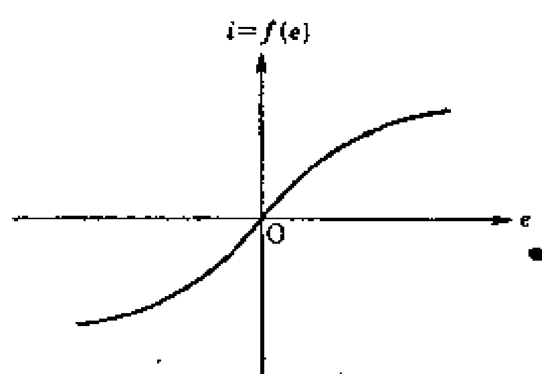


图 11.1

如图 11.1 所示，关于原点对称的非綫性关系为 $i=f(e)$，在 e 大体上可視为正弦波的情况下，$e=E\cos(\omega t-\theta)$，这被代替的近似綫性关系为

$$i=\sigma e,\ \sigma=\pi^{-1}E^{-1}\int_0^{2\pi}f(E\cos u)\cos u\,du,$$

这里 σ 是电压的振幅 E 的函数。

例　§6 例3中考虑的阳极同步振蕩器。

$$(M-DL)\dot{i}_L=A\cos(\omega t-\theta).$$

将

$$I_p=f(E_g)=f[DE-(M-DL)\dot{i}_L]$$

代以

$$f(DE)+\sigma(M-DL)\dot{i}_L,$$

其中

$$\sigma=\pi^{-1}A^{-1}\int_0^{2\pi}f(DE-A\cos u)\cos u\,du.$$

此时方程

$$LC\ddot{i}_L+\{LR^{-1}\dot{i}_L+f[DE-(M-DL)\dot{i}_L]\}+i_L=0$$

成为

$$LC\ddot{i}_L+[LR^{-1}+\sigma(M-DL)]\dot{i}_L+i_L=-f(DE).$$

令 $x=i_L+f(DE)$，于是

$$LC\ddot{x}+[LR^{-1}+\sigma(M-DL)]\dot{x}+x=0.$$

总之对于满足 $\sigma(M-DL)+LR^{-1}=0$ 的 A，可以得到定常振动

$$(\omega=1/\sqrt{LC}).$$

第3章　非自治系統的几何方法

本章説明下列方程：

$$\dot{x}=P(x,\ y,\ t),\quad \dot{y}=Q(x,\ y,\ t) \tag{3}$$

的几何处理的方法。方程右边的 P, Q 是 x, y 和 t 的实解析函数，t 是周期为 L 的周期函数。

象第1章那样把(1)式的解表示在平面(相平面)上是方便的，但(3)式的右边含有 t，为了将解作几何表示，有必要考虑三元空間 $(x,\ y,\ t)$。实际上，解的状况远比(1)式复杂，在周期解以外还显示出别的重要的解。

§12　周期系数綫性方程

作为(3)式的簡单情况，考虑下列方程：

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)y,\quad \dot{y}=c(t)x+d(t)y, \tag{12.1}$$

此处 a, b, c, d 是周期为 L 的实解析函数。

(12.1)的一般解总是下列(12.2)或(12.3)的形式之一：

$$\left.\begin{aligned} x&=A\exp(h_1t)\varphi_1(t)+B\exp(h_2t)\varphi_2(t),\\ y&=A\exp(h_1t)\psi_1(t)+B\exp(h_2t)\psi_2(t).\end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\{A+B[(\alpha t)/(\rho_1L)+\varphi_2(t)]\}\exp(h_1t)\varphi_1(t),\\ y&=\{A+B[(\alpha t)/(\rho_1L)+\psi_2(t)]\}\exp(h_1t)\psi_1(t).\end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

此处 A, B 是任意常数；φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 一般是复数值函数，具有周期 L；h_1, h_2 一般是复数，而 h_1+h_2 是实数；$\rho_1=\exp(h_1L)$；α 一般是复数。

再者，(12.2)，(12.3)的右边一般是复数值函数，可是适当选取其实部，(12.1)的一般解也可以是实值函数。

簡单地説明(12.2)，(12.3)的推导❶。首先来寻求滿足

$$x(t+L)=\rho x(t),\quad y(t+L)=\rho y(t)\quad (\rho\text{ 一般是复常数})$$

的 (12.1) 的解 $(x(t), y(t))$ (所求的解 $x(t), y(t)$ 一般是复值函数)。今設(12.1)的一組独立解是

$$[\xi_{11}(t), \xi_{21}(t)],\quad [\xi_{12}(t), \xi_{22}(t)],$$

取

$$x(t)=\alpha_1\xi_{11}(t)+\alpha_2\xi_{12}(t),\quad y(t)=\alpha_1\xi_{21}(t)+\alpha_2\xi_{22}(t).$$

另一方面，由于

$$[\xi_{11}(t+L), \xi_{21}(t+L)] \text{ 和 } [\xi_{12}(t+L), \xi_{22}(t+L)]$$

也为(12.1)的解，所以

$$\xi_{ij}(t+L)=c_{1j}\xi_{i1}(t)+c_{2j}\xi_{i2}(t)\quad (i, j=1, 2).$$

假定用矩陣表示，

$$X(t)=\|\xi_{ij}(t)\|,\quad C=\|c_{ij}\|,$$

則

$$X(t+L)=X(t)C.$$

从而如果 $x(t), y(t)$ 滿足上述条件，則必有

$$|C-\rho E|=0$$

(E 为单位矩陣，$|C|$是矩陣 C 的行列式)。反之，在 $|C-\rho E|=0$ 成立时，对于 ρ 可确定适当的 α_1, α_2，則滿足

$$x(t+L)=\rho x(t),\quad y(t+L)=\rho y(t)$$

的解是存在的。$|C-\rho E|=0$ 称为(12.1)的**特征方程**。根 ρ_1, ρ_2 称为**特征根**。由 $|T^{-1}CT-\rho E|=|C-\rho E|$ 可知特征方程不依賴于这組独立解的选擇。显然，$|C|=\rho_1\rho_2$，从而当 $X(t_0)=E$，則 $|X(t_0+L)|=\rho_1\rho_2$. 此处按 $X(t_0)=E$，$X(t)$ 的元素是实值函数，所以 $|X(t_0+L)|$ 是实数，因此要注意乘积 $\rho_1\rho_2$ 是实数。

考慮 $\rho_1\neq\rho_2$ 的情况。对

$$x_i(t+L)=\rho_i x_i(t),\quad y_i(t+L)=\rho_i y_i(t)$$

存在两个独立解 $(x_i(t), y_i(t))$ $(i=1, 2)$. 此处 $h_iL=\log\rho_i$ (h_i 是将 $2\pi\sqrt{-1}/L$ 取作除数确定的，而 h_1+h_2 是确定的实数)。今 $x_i(t)\exp(-h_it)$，$y_i(t)\exp(-h_it)$ 是周期为 L 的周期函数，从而 $\varphi_i(t)$，$\psi_i(t)$ 是周期为 L 的周期函数，其中取

❶ 参考本丛书《常微分方程》第6章关于周期系数綫性微分方程的一般理論。

$$x_i=\exp(h_i t)\varphi_i(t),\quad y_i=\exp(h_i t)\psi_i(t)\quad (i=1,2).$$

于是这种情况中的一般解是由 (12.2) 所确定。h_1, h_2 称为 (12.1) 的**特征指数**(characteristic exponent)。

其次,設 $\rho_1=\rho_2$, 可定出一組解

$$x_1(t+L)=\rho_1 x_1(t),\quad y_1(t+L)=\rho_1 y_1(t).$$

此外,对任意独立解 $(x_2(t), y_2(t))$,有

$$x_2(t+L)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t),\quad y_2(t+L)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t).$$

可是 $\rho_1=\rho_2$, $\beta=\rho_1$, 从而

$$\varphi_2(t)=x_2(t)/x_1(t)-(\alpha t)/(\rho_1 L)$$

是周期函数(周期为 L). 因而,

$$x_2(t)=x_1(t)[\varphi_2(t)+(\alpha t)/\rho_1 L],$$
$$y_2(t)=y_1(t)[\psi_2(t)+(\alpha t)/\rho_1 L].$$

結果一般解有(12.3)的形式。

用 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ 比較簡单的形式来表示 ρ_1, ρ_2, 或表示 h_1, h_2 是困难的。容易得知下列关系成立:

$$(h_1+h_2)L=\int_0^L[a(t)+d(t)]dt. \tag{12.4}$$

如上述那样,对于綫性独立解作矩陣 $X(t)$, 取

$$|X(t)|'=[a(t)+d(t)]|X(t)|.$$

因此

$$|X(t)|=|X(t_0)|\exp\int_{t_0}^{t}[a(t)+d(t)]dt.$$

此处 $X(t_0)=E$, $t=t_0+L$, 取

$$|X(t_0+L)|=\rho_1\rho_2=\exp\int_{t_0}^{t_0+L}[a(t)+d(t)]dt$$
$$=\exp\int_0^L[a(t)+d(t)]dt=\exp[(h_1+h_2)L].$$

假定(12.1)的一般解可以得到的話,則非齐次方程

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)y+e(t),\quad \dot{y}=c(t)x+d(t)y+f(t) \tag{12.5}$$

的一般解可用常数变易法求得。

其次,二阶綫性方程

$$\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0\quad (p,\ q\ \text{是周期为}\ L\ \text{的实函数})$$

的一般解是由(12.2)或(12.3)的第一式給定的(令 $\dot{x}=y$)。此时

$$(h_1+h_2)L=-\int_0^L p(t)\,dt.$$

現在考虑 **Hill 方程**

$$\ddot{x}+q(t)x=0 \quad (q\text{ 是周期为 } L \text{ 的实函数})。$$

由(12.4), $h_1+h_2=0$, $\rho_1\rho_2=1$。設 Hill 方程的解 $x_1(t), x_2(t)$ 滿足 $x_1(0)=1$, $\dot{x}_1(0)=0$; $x_2(0)=0$, $\dot{x}_2(0)=1$。其特征方程为 $\rho^2-2N\rho+1=0$, 其中

$$2N=x_1(L)+\dot{x}_2(L).$$

由于 N 为实数,所以当 $N^2\geqslant 1$ 时 ρ_i 是实数, $N^2<1$ 时 ρ_i 是共軛复数, 且 $|\rho_i|=1$。因此可写作 $\mu=h_1=-h_2$; $\rho_i>0$ 时 μ 是实数, $\rho_i<0$ 时 μ 是虚部为 π/L 的复数,而 ρ_i 是絕对值为 1 的共軛复数时, μ 是純虚数。μ 叫作 Hill 方程的特征指数。其一般解是(12.2)或(12.3)的第一式。

$$\text{当 } \rho_i\neq\pm1 \text{ 时}\quad x=Ae^{\mu t}\varphi_1(t)+Be^{-\mu t}\varphi_2(t),$$

$$\text{当 } \rho_i=1 \text{ 时}\quad x=(A+B\alpha_1 t)\varphi_1(t)+B\varphi_2(t),$$

$$\text{当 } \rho_i=-1 \text{ 时}\quad x=(A+B\alpha_1 t)\bar{\varphi}_1(t)+B\bar{\varphi}_2(t).$$

此处 φ_i 是周期为 L 的周期函数, $\bar{\varphi}_i$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, α_1 为常数。当 $\rho_i\neq\pm1$ 时,要任意解为有界的必要且充分条件是: μ 为純虚数。今若 $\mu L\sqrt{-1}/(2\pi)$ 是无理数,則解($\neq 0$)全部为概周期函数(不是周期函数),若 $\mu L\sqrt{-1}/(2\pi)$ 为有理数 n/m (m, n 为互质的整数 $m\neq 1, n/m\neq 1/2$),解全部是周期函数(周期为 mL)。

将 Hill 方程的 $q(t)$(周期为 2π)作 Fourier 展开,写作

$$q(t)=a+a_1\cos t+b_1\sin t+\cdots,$$

今詳細研究略去第 2 以上高諧波,即特别考虑

$$q(t)=a+c\cos(t+\theta)$$

的情况。一般,下列方程:

$$\ddot{x}+(a+2b\cos 2t)x=0 \tag{12.6}$$

称为 **Mathieu** 方程。要观察(12.6)的解的性质，决定特征指数 μ 是重要的。由于用 a, b 表示 μ 是复杂的，此处只作下列事实的叙述。(a, b)属于图 12.1 的有斜綫区域时，μ 是純虛数(虛数部分不为整数)，因而解全部是有界的。当(a, b)不属于斜綫区域时，μ 的实数部分不为 0，所以 $t>t_0$ 时解无界。其次 (a, b) 在区域的边界上时 $\mu=in$ (n 是整数)。特别在图 12.1 的实綫上时，n 为偶数，存在周期为 π 的解，但独立解一般不是有界的。至于在虛綫上，n 是奇数，存在周期为 2π 的解，而独立解一般是无界的。

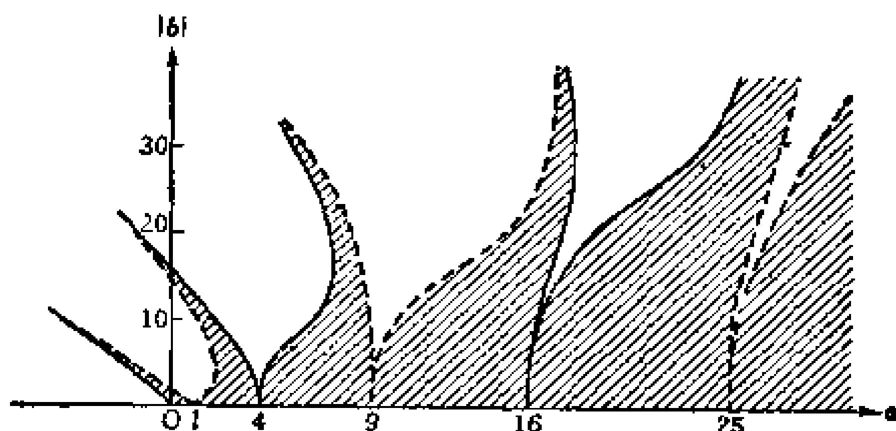


图 12.1

将(12.6)的正弦波代以矩形波，得下列方程：

$$\ddot{x}+(a+2b\,\mathrm{sgn}\cos 2t)x=0, \tag{12.7}$$

这是容易积分的，确定 ρ 的方程是

$$\rho^2-2N\rho+1=0.$$

此处在 $a^2\neq 4b^2$ 时，

$$N=\cos(\sqrt{a+2b}\,\pi/2)\cos(\sqrt{a-2b}\,\pi/2)$$
$$-a(a^2-4b^2)^{-1/2}\sin(\sqrt{a+2b}\,\pi/2)\sin(\sqrt{a-2b}\,\pi/2),$$

而当 $a=\pm 2b$ 时，

$$N=\cos(\sqrt{a\pm 2b}\,\pi/2)-\frac{\pi}{2}a(a\pm 2b)^{-1/2}\sin(\sqrt{a\pm 2b}\,\pi/2),$$

N 是实常数。

图 12.2 中，在斜綫区域内 $N^2<1$，这里的解全部是有界的。

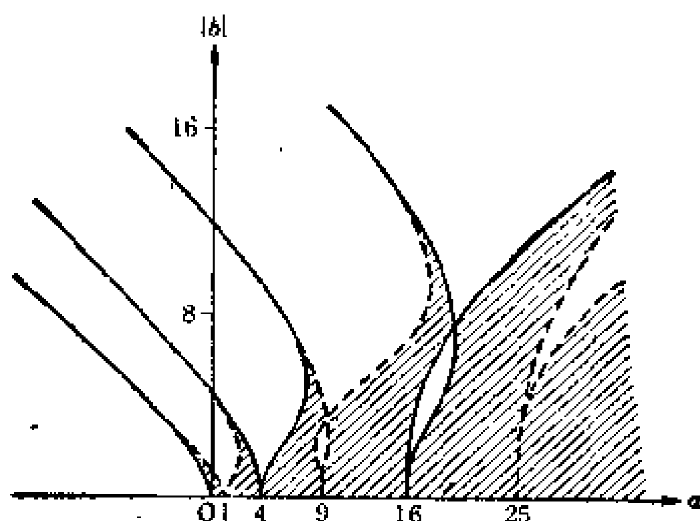


图 12.2

§13 变 换 T

假定通过对于 $t=t_0$ 时的任一点 (x_0, y_0)，在 $t>t_0$ (3) 式的解 $(x(t), y(t))$ 存在，假設在 t_0 以后的有限时間内，$(x(t), y(t))$ 不可能 $\to\infty$。(12.1)，(12.5)满足这一假定。則

$$x_1=x(t_0+L),\quad y_1=y(t_0+L)$$

将平面 $\Pi_0(t=t_0)$ 上点 (x_0, y_0) 变换到平面 $\Pi_1(t=t_0+L)$ 上的点 (x_1, y_1)，而变换 T:

$$T(x_0, y_0)=(x_1, y_1)$$

是确定的(图 13.1)。T 不是双方一对一的連續变换❶ (Π_0 上的右向单一閉曲綫經 T 因而变为 Π_1 上的右向单一閉曲綫)。这个变換 T 对方程(3)由于在 $t\to t+L$ 不变，所以用来研究(3)式的解的性质是方便的。

特別在方程 (12.1) 的場合里，变換 T 可用矩陣表示出来。实际上，用

❶ 实际上 T 是双方一对一，且連續的变换。——校者注

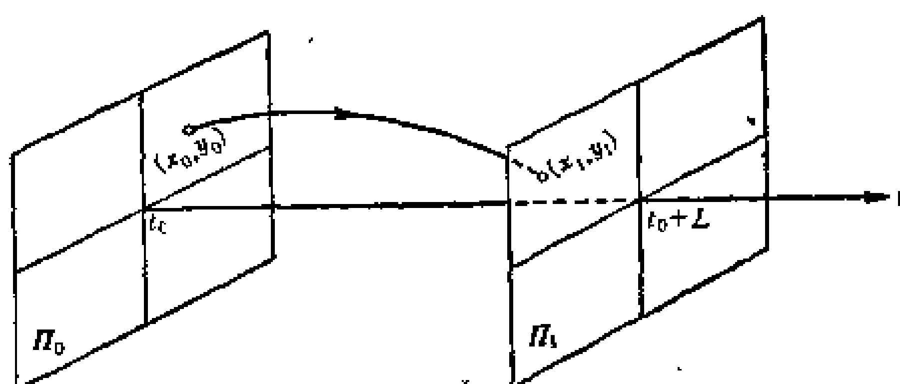


图 13.1

§12的記法，有 $X(t_0)=E$，对一組独立解

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=X(t_0+L)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

成立。今(12.1)具有周期L的解($\neq 0$)，这等于說 $X(t_0+L)$是特征值为1的矩陣。(12.1)具有周期 nL 的解就等同于要 $X(t_0+L)$ 是特征值为 $\exp(2m\pi i/n)$ (m, n 互质)的矩陣。

在(3)式具有周期 L 的解 $(x(t), y(t))$ 的情况中，将 Π_0 和 Π_1 看作在同一平面 Π 上，点 $(x(t_0), y(t_0))$ 在变换 T 是不动的点——**不动点**(fixed point)。反之，依据变换 T 通过不动点的(3)式的解具有周期 L。今 Π 上的点 P_k 按照变换 T 变为 P_{k+1} ($k=0, 1, 2, \cdots$)时，$(T(P_k)=P_{k+1})$ 写作 $T^m(P_0)=P_m$。

$$P_0\neq P_i\quad(1\leqslant i\leqslant m-1),\quad P_0=P_m$$

时，P_0 称为**周期点**(periodic point)。这种情况当 $t=t_0$ 时通过 P_0 的(3)式的解周期为 mL。如在点列$\{P_n\}$ $(n>0)$中对 P_0 有无論多么近的点，P_0 称为**回归点**(recurrent point)。

例如在 Hill 方程中，

$$i\mu L/2\pi=n/m\quad(m,\ n\ \text{互质},\ m\neq 1,\ n/m\neq 1/2),$$

如写作 $\dot{x}=y$，Π 上的点有周期点。或者当 $i\mu L/2\pi$ 为无理数时，有回归点。

經过变换 T，在点(x_0, y_0)邻近的面积元素 $\delta x_0\delta y_0$ 变为点 $(x_1, y_1)=T(x_0, y_0)$ 的邻近的面积元素 $\delta x_1\delta y_1$；現在研究他們之間的关系。当 $t=t_0$ 时，$x=x_0$，$y=y_0$ 对(3)式的解$(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$取

$$\Delta(t)=\partial(\bar{x},\ \bar{y})/\partial(x_0,\ y_0),$$

并写为

$$\dot{\Delta}(t)=([P_x]+[Q_y])\Delta(t),$$

其中

$$[P_x]=P_x(\bar{x}(t),\ \bar{y}(t),t),\quad [Q_y]=Q_y(\bar{x}(t),\ \bar{y}(t),t),$$

从而

$$\Delta(t)=\Delta(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}([P_x]+[Q_y])dt.$$

另一方面，由 $\Delta(t_0)=1$，所以

$$\Delta(t_0+L)=\exp\int_{t_0}^{t_0+L}([P_x]+[Q_y])dt.$$

因此

$$\delta x_1\delta y_1=A(x_0,\ y_0)\delta x_0\delta y_0,$$

其中

$$A(x_0,\ y_0)=\exp\int_{t_0}^{t_0+L}([P_x]+[Q_y])dt. \tag{13.1}$$

右端的积分 <0，$=0$ 或 >0 的各种情况对应于变化 T 有面积元素减少、不变或增多。特别在(3)式中，P_x+Q_y 常 <0，$=0$ 或 >0 的各种情况，分别称为面积减少型、不变型或增加型。

今考虑面积减少型的微分方程 (3)。設 R_0 为平面 Π 上某区域 (面积为 m_0)，$T^kR_0=R_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 的面积为 m_k，并設 m_k 单調減少。于此，当 $t=t_0$ 时通过 R_0 的点的这些解随时間逐漸靠近。不过在 $k\to\infty$ 时，R_k 还不一定收斂于一点。若对任意的 R_0，如果 R_k 收斂于一点，则(3)式只有一个周期解，而其他的解当 $t\to+\infty$ 时全部收斂于这个周期解。

用以上方法对于方程

$$\ddot{x}+f(x,\ \dot{x},\ t)=0 \tag{13.2}$$

或

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x,\ y,\ t) \tag{13.3}$$

来研究。此处 f 是关于 x, $\dot{x}$, t 的实解析函数，且关于 t 是周期为 L 的周期函数。对于当 $t=t_0$ 时 $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ (x_0, $\dot{x}_0$ 任意的)的解 $x(t)$, $\dot{x}(t)$ 在 $t_0<t<+\infty$ 不可能成为 ∞。显然 $f_{\dot{x}}$ 常 >0, $=0$ 或 <0 的情况，分别对应于面积减少，不变或增加型。例如对于

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x, t)=0,$$

对应于 $f(x)$ 常 >0 或 <0 的情况，分别有面积减少型或增加型。

§14 不动点和周期解

如§2中把平衡点分类一样，此处把不动点分类。变换 T 将不动点 (x_0, y_0) 的邻近点仍然变换在 (x_0, y_0) 的邻近，现在研究移动的各种模样。今当 $t=t_0$ 时 $x=x_0+u_0$, $y=y_0+v_0$ 将 (3) 式的解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 取作

$$x_0+u_1=\tilde{x}(t_0+L), \quad y_0+v_1=\tilde{y}(t_0+L).$$

在 $u_0=v_0=0$ 时有 $u_1=v_1=0$; 当 u_0, v_0 充分小时，u_1, v_1 可展开为:

$$u_1=au_0+bv_0+\cdots, \quad v_1=cu_0+dv_0+\cdots, \tag{14.1}$$

其中 $+\cdots$ 是 u_0, v_0 二次以上的項。

此处对于当 $t=t_0$ 时 $x=x_0, y=y_0$ (3)式的解 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$，写出

$$a=\partial\bar{x}(t_0+L)/\partial x_0, \quad b=\partial\bar{x}(t_0+L)/\partial y_0,$$

$$c=\partial\bar{y}(t_0+L)/\partial x_0, \quad d=\partial\bar{y}(t_0+L)/\partial y_0,$$

象推导(13.1)那样，得

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\exp\int_{t_0}^{t_0+L}([P_x]+[Q_y])dt, \tag{14.2}$$

其中

$$[P_x]=P_x(\bar{x}(t), \bar{y}(t), t), \quad [Q_y]=Q_y(\bar{x}(t), \bar{y}(t), t).$$

其次把 $$D(\rho)=\begin{vmatrix} a-\rho & b \\ c & d-\rho \end{vmatrix}=0$$

的根取作 ρ_1, ρ_2; $|\rho_1|$, $|\rho_2|$ 皆不为 1 时,不动点(x_0, y_0)称为是簡单的。以后沒有預先声明时,只考虑簡单的情况。由于(14.2),

$$D(0)=\rho_1\rho_2>0,$$

所以簡单不动点分为下列四种类型:

1. **完全穩定**(completely stable)**不动点**

$|\rho_1|<1, |\rho_2|<1 \quad (D(0)<1,\ D(-1)>0,\ D(+1)>0).$

2. **完全不穩定** (completely unstable) **不动点**

$|\rho_1|>1, |\rho_2|>1 \quad (D(0)>1,\ D(-1)>0,\ D(+1)>0).$

3. **正不穩定**(directly unstable)**不动点**

$$\rho_1>1>\rho_2>0 \quad (D(+1)<0).$$

4. **逆不穩定**(inversely unstable)**不动点**

$$0>\rho_1>-1>\rho_2 \quad (D(-1)<0).$$

如图所表示,关于变换 T 以不动点为中心的实綫变换为虚綫(参看图 14.1)。

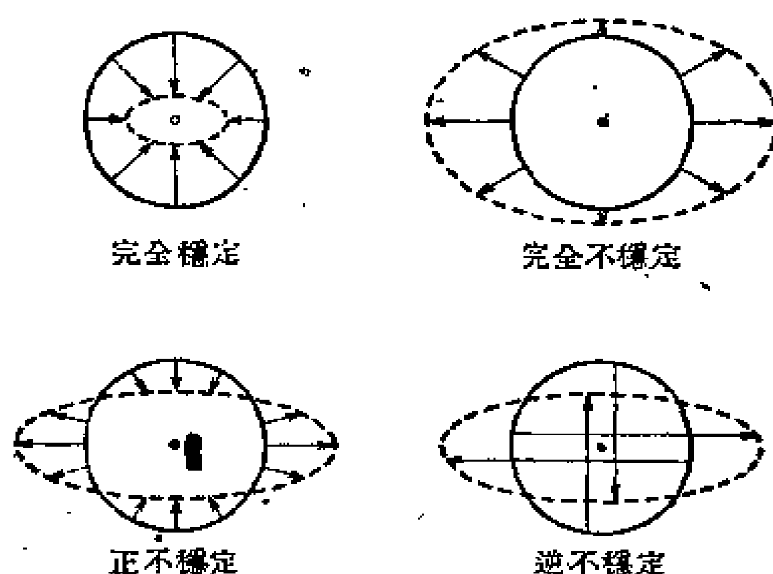


图 14.1

以上分类对周期点同样适用。

上述不动点的分类,也同样完全适用于对周期解的分类。即(3)式的周期为 L 的周期解$(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$对应于 T 的不动点$(\bar{x}(t_0),$

$\bar{y}(t_0)$)，这不动点的简单，完全稳定，完全不稳定，正不稳定，逆不稳定等性质分别对应于 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是简单，完全稳定，完全不稳定，正不稳定，逆不稳定的定义。这定义与 t_0 的取法无关。

設变换 T' 将 $(x(t_0'), y(t_0'))$ 变成为 $(x(t_0'+L), y(t_0'+L))$，对应于(14.1)的右端中有 a', b', c', d'，则有

$$(a-\rho)(d-\rho)-bc=(a'-\rho)(d'-\rho)-b'c'.$$

按照以上可得下列結果:

1）在完全稳定周期解充分近处的解，当 $t\to+\infty$ 时收斂于这个周期解。

2）在完全不稳定周期解充分近处的解，在 $t\to+\infty$ 时从这周期解远离开。

3）在正不稳定或逆不稳定周期解充分近处的解，在 $t\to+\infty$ 时一般从这周期解远离开。

假定对(3)式的解 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 有

$$\dot{\xi}=[P_x]\xi+[P_y]\eta,\quad \dot{\eta}=[Q_x]\xi+[Q_y]\eta, \tag{14.3}$$

其中 $[F]=F(\bar{x}(t), \bar{y}(t), t)$，(14.3)称为(3)式的关于 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 的**变分方程** (variation equation)。考虑对于靠近 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 的解 $(\bar{x}(t)+\xi, \bar{y}(t)+\eta)$，$(\xi, \eta)$ 所满足的方程，略去 ξ, η 二次以上的項。

当 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是周期为 L 的周期解时，(14.3)是周期系数綫性方程。而 (14.3) 的特征方程与上述 $D(\rho)=0$ 是一致的 (設 $\bar{x}(t_0)=x_0$, $\bar{y}(t_0)=y_0$).

当 $t=t_0$ 时 $\xi=1, \eta=0$ (14.3) 的解是 $(\xi_1(t), \eta_1(t))$, $\xi=0, \eta=1$ 时，解是 $(\xi_2(t), \eta_2(t))$。令

$$\xi_1(t)=\partial\bar{x}/\partial x_0,\quad \xi_2(t)=\partial\bar{x}/\partial y_0,\quad \eta_1(t)=\partial\bar{y}/\partial x_0,\quad \eta_2(t)=\partial\bar{y}/\partial y_0.$$

则(14.1)中 a, b, c, d 分别等于

$$\xi_1(t_0+L),\quad \xi_2(t_0+L),\quad \eta_1(t_0+L),\quad \eta_2(t_0+L).$$

因此利用变分方程的特征根能判定簡单周期解的稳定性。即与(3)式的周期解相应的变分方程(14.3)的特征根絕对值小于1时,这周期解完全稳定;絕对值大于1时,周期解完全不稳定,正不稳定或逆不稳定。

其次考虑(3)式右边不含 t 的情况。即用(1)式代(3)式,假定它的周期为 L 的解为 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. 此时关于 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 变分方程(14.3)($[F]=F(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$)的特征根中至少有一个是1.

$(\dot{\bar{x}}(t), \dot{\bar{y}}(t))$ 为变分方程的解,由于它的周期性❶, ρ_1, ρ_2 中有一个为1.

因而(3)式右边不含有 t 时,这周期解不是簡单的。再其次注意将(1)式的周期解 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 的周期設为 L, 象(12.4)的証明那样

$$\rho_1\rho_2=\exp\int_0^L([P_x]+[Q_y])dt.$$

由于 ρ_1, ρ_2 中有一个为1,設 $\rho_1=1$, 則 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 在 $\rho_2<1$ 时为軌道稳定, $\rho_2>1$ 时軌道不稳定。

§15 关于稳定性

前节説明了(3)式周期解的稳定性,象第1章(1)式的平衡点和周期解的稳定性那样,微分方程解的稳定性定义有許多种类,此处簡单説明与本論关系較深的稳定性的意义。

1. **Ляпунов 的稳定** 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时, $(x_0(t), y_0(t))$ 是方程

$$\dot{x}=P(x, y, t), \quad \dot{y}=Q(x, y, t) \tag{15.1}$$

的解。这里并不假定右边为 t 的周期函数,当然解也不限于周期的。如果下列条件成立:对任意 $\varepsilon>0$, 可确定适当的 $\delta(\varepsilon)>0$, 对(15.1)的任一解 $(x(t), y(t))$, 設当 $t=t_0$ 时

❶ 即 $\dot{\bar{x}}(t+L)=\rho\dot{\bar{x}}(t)$, $\dot{\bar{y}}(t+L)=\rho\dot{\bar{y}}(t)$, 而 $\rho=1$. ——校者注

$$|x(t_0)-x_0(t_0)|<\delta,\quad |y(t_0)-y_0(t_0)|<\delta,$$

则在 $t\geqslant t_0$ 时

$$|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon,\quad |y(t)-y_0(t)|<\varepsilon.$$

则 $(x_0(t), y_0(t))$ 为有 **Ляпунов 意义稳定的稳定性**，总之，对于稳定的解，在它邻近的解永远逗留在它的邻近。不满足稳定条件的解叫作不稳定的。

此处所述稳定性与 §2 平衡点的稳定性一样。即稳定的結点、稳定的焦点及中心点稳定。不过对应于 §4 中稳定閉軌道的周期解不一定在这种意义下的稳定。

例如 $\dot{x}=y,\ \dot{y}=-a^2x$ 的任意解(周期解)就有这种稳定的意义。不过

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-a^2x-b^2x^3,$$

除 $x=0,\ y=0$ 以外的任意解(周期解)都是不稳定的(軌道是閉曲綫 $y^2+a^2x^2+b^2x^4/2=$ 常数，对不同的軌道有不同的周期因而开始时相近的两点可以漸漸分离)，而軌道稳定則是明显的。

2. **漸近稳定** 如果(15.1)的解 $(x_0(t), y_0(t))$ 是稳定的，且对一定的 t_0 有 $\delta>0$ 存在，

$$|x(t_0)-x_0(t_0)|<\delta,\quad |y(t_0)-y_0(t_0)|<\delta,$$

而关于任意的解 $(x(t), y(t))$

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-x_0(t)|=0,\quad \lim_{t\to\infty}|y(t)-y_0(t)|=0$$

成立，則 $(x_0(t), y_0(t))$ 称为**漸近稳定** (asymptotically stable)。在解 $(x_0(t), y_0(t))$ 邻近的解不仅逗留在它的邻近，而且当 $t\to+\infty$ 时收斂于 $(x_0(t), y_0(t))$。

§2 的稳定結点，稳定焦点，§14 的完全稳定周期解都是漸近稳定的。

3. **E. Trefftz 的稳定** (15.1)的右边关于 t 具有周期 L。若满足下列条件 (a)，(b)，解 $(x_0(t), y_0(t))$ 称为 **Trefftz 意义下的稳定或者 (T) 稳定**：

(a) 在 $t \geqslant t_0$, $|x_0(t)| \leqslant M$, $|y_0(t)| \leqslant M$。

(b) 于 $(x_0(t), y_0(t))$ 有一正数 ε 存在，对于(15.1)的任意解 $(x(t), y(t))$，如对 τ $(\tau \geqslant t_0)$ 有

$$|x(\tau)-x_0(\tau)|<\varepsilon, \quad |y(\tau)-y_0(\tau)|<\varepsilon,$$

则有下式成立：

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0, \quad \lim_{t\to+\infty}|y(t)-y_0(t)|=0,$$

此正数 ε 叫作 $(x_0(t), y_0(t))$ 的**稳定度**。

ε 越大則解的范圍在 $t\to+\infty$ 距 $(x_0(t), y_0(t))$ 越近。

(T)稳定則为漸近稳定，反之不一定成立。可是漸近稳定的周期解（周期是 L 的整数倍）則是(T)稳定的，特別是 § 14 的完全稳定周期解为(T)稳定。再者还有下列显著性質：

(3)式的 (T) 稳定解，是完全稳定周期解（周期 L 的整数倍），而在 $t\to+\infty$ 时，周期为 L 整数倍的解接近于完全稳定的解（証略）。实际上在减衰系統发生这种周期运动是很多的。这个事实可认为說明了这一問題。

4. 无限小稳定或一次稳定 当 $t \geqslant t_0$ 时，与(3)式的周期解 $(x_0(t), y_0(t))$ 相应的变分方程的全部解为有界时，$(x_0(t), y_0(t))$ 叫做**无限小稳定或一次稳定**。将 $(x_0(t)+\xi, y_0(t)+\eta)$ 取为 $(x_0(t), y_0(t))$ 的近似解，变分方程卽为在 (ξ, η) 所滿足方程中略去 ξ, η 二次以上的項。这就有无限小或一次稳定的意义。

由于周期解的完全稳定性与其相应的变分方程的特征指数有負实部是一致的，所以完全稳定卽为无限小稳定。完全不稳定，正不稳定，逆不稳定的周期解皆不为无限小稳定。稳定卽为无限小稳定，逆之不一定成立。某周期解对应变分方程的特征指数是純虛数的場合，判定周期解是否稳定一般有必要作进一步的研究，这問題是困难的。

在实际問題中用无限小稳定代替稳定，簡称之为稳定。在无限小稳定性里，处理的是綫性方程問題，这是比較容易的。

例如
$$\ddot{x}+a^2x+bx^3=A\cos\omega t$$
具有周期解 $x_0(t)$ 时，$x_0(t)+\xi$ 为其近似解（一般地 $|\xi(t)|\ll|x_0(t)|$），假如略去 ξ 两次以上的項，$\xi(t)$ 必須滿足 $x_0(t)$ 所对应的变分方程
$$\ddot{\xi}+(a^2+3bx_0^2(t))\xi=0.$$
这个 Hill 方程的解于 $t\geqslant t_0$ 全部有界时，$x_0(t)$ 为无限小稳定。又設 $x_0^2(t)$ 的 Fourier 展开式为
$$x_0^2(t)=\alpha_0+\alpha_1\cos\omega t+\beta\sin\omega t+\cdots,$$
如略去 $+\cdots$ 部分，其变分方程是 Mathieu 方程。对 Mathieu 方程解的性质要作进一步的研究，方能利用无限小稳定的判定。

又 Hill 方程，Mathieu 方程为周期系数二阶綫性方程，解如有界叫作稳定，解如无界叫作不稳定。

§16 一致有界性[1]

此处在一致有界性的假定下研究(3)式的解的性质。

在减衰的某系統中可能有振幅增大的情况。例如方程
$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=A\sin t,$$
除有　$f(x)>0$，$\left|\int_0^x f(u)\,du\right|\leqslant a$　（a 与 x 无关）假定之外，还有 $A>2a$，任意解 $x(t)$ 在 $t\to+\infty$ 时 x 为无界。

令　$\phi(s)=\int_0^{x(s)} f(u)\,du$，
$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+\int_0^t \sin(t-s)(A\sin s-\phi'(s))\,ds$$
$$=C_1\cos t+C_2\sin t-(A/2)t\cos t+(A/2+\phi(0))\sin t-\int_0^t\cos(t-s)\phi(s)\,ds,$$
此处最后項的絕对值不超过 at。

因此将象这样的情况除外，考虑下面**一致有界性**的規定：

存在 $R>0$ 和正整数 N，对(3)式的任意解 $(x(t),y(t))$，在 $t=t_0$ 有以原点为中心 R 为半徑的圓，而在 $t>t_0+N$ 永逗留在这圓内。

[1] 此节初学者可以略去。

在有这种性质的情况，(3)式叫作一致有界的❶，实际問題中具有这种性质的情况是很多的。

当(3)式为一致有界的情况时，在平面上有具有下列性质的点集 S，称为**最大不变集合**(証略)：

1) S 为有界連通的閉集合时，变换 T 保持不变。即 S 的点經变换 T 仍变为 S 的点。

2) S 的余集合(不屬于 S 点的集合)加上无限远点为一个单連通集合。

3) 設点 P_0 不屬于 S，当 $n\to\infty$ 时 $P_n=T^n(P_0)$ 充分靠近 S。

4) S 至少有一个不动点。

5) 不动点，周期点，回归点皆屬于 S。

6) 对面积减少型，S 的面积为零。

7) S 仅由一点組成的場合，周期为 L 的解仅有一个，其他解在 $t\to+\infty$ 时皆收斂于这个周期解。

关于 S，作簡单的説明。今考虑当 ρ 充分大及 $t=t_0$ 时滿足

$$x^2(t_0)+y^2(t_0)\leqslant\rho^2$$

的解的集合。在 $t=t_0+kL$ 的切口表示为点集 S_k，当 $k\to\infty$ 时 S_k 靠近 S。

其次考虑关于周期解。假如有一致有界性，則(3)式至少有一周期为 L 的解(上述(4))。在这种場合中，若周期解全部是单純的，則可証明下列性质(証略)：

1) 周期为 L 的解的个数为 N_1，其中完全稳定和完全不稳定的个数为 C_1，正不稳定的个数为 D_1，逆不稳定的个数为 I_1，則

$$C_1+I_1=D_1+1,\quad N_1=C_1+I_1+D_1=2D_1+1.$$

从而周期为 L 的解的个数为奇数。

2) 若 $k>1$，关于周期(最小周期)为 kL 的解的个数和上面

❶ 也叫做 D-类系統，D 是大范圍内散逸的意思。——校者注

一样表示为 N_k, O_k, D_k, I_k. 则当 k 为奇数时，$O_k+I_k=D_k$, $N_k=2D_k$. 而 k 为偶数时，

$$O_k+I_k=D_k+2I_{k/2}, \quad N_k=2(D_k+I_{k/2}).$$

从而周期 $kL(k>1)$ 的解的个数为偶数。

証明从略。簡单說来，可以考虑利用指数。在平面 Π 上不动点（或者周期点）的附近描一小圓 C，其中沒有其他不动点（或者周期点），C 上一点 P 沿正向一周时，向量 $\overrightarrow{PT}(P)$ 或者 $\overrightarrow{PT^k}(P)$ 的偏角变化为 $2m\pi$，則 m 称为这不动点（或周期点）的**指数**。完全稳定，完全不稳定，逆不稳定不动点的指数是 $+1$，正稳定的不动点（或周期点）的指数为 -1，利用这种性质，可以証明上述(1)，(2)。

此处不加証明地再提出最大不变集合的几个性质。关于方程的形式和 S 的形状之間的关系知道得还不太詳細。若 S 的边界 K 是充分光滑的单一閉曲綫，則通过 K 的点的解在圓环面上能用某一阶微分方程的积分曲綫表示，則下面 1) 或 2) 成立（証略）。

1) 在通过 K 的点的解中有周期 mL（m 是正整数）的解。非周期的解当 $t\to+\infty$ 时，則收斂于这周期 mL 的解。

2) 通过 K 的点的解一般写为

$$x=F(t, \nu t), \quad y=G(t, \nu t),$$

此处 $F(t,s), G(t,s)$ 都是对 t 和 s 周期为 L 的函数，而 ν 为无理数。

一般說来，K（从而 S）的形状不是簡单的，最簡单情况中 S 仅由一点組成，例如下列三种情况之一（$\dot{x}=y$, $\varphi(t)$ 是周期为 L 的連續函数）：

1) $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=\varphi(t)$,

$$f(x)>0, \quad \int^{\pm\infty} f(x)\,dx=\pm\infty.$$

2) $\ddot{x}+F(\dot{x})+x=\varphi(t)$,

$$F(0)=0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} F(x)=\pm\infty, \quad F'(x)>0.$$

3) $\ddot{x}+Cf'(x)\dot{x}+f(x)=\varphi(t)$,

$$f'(x)>0,\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty,\quad f(0)=0,$$

C 充分大或者 $|\varphi(t)|$ 充分小。

以上三种的任一种情况中，仅有一个周期为 L 的解，其他解全部收斂于这解。

再举一例，

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=\varphi(t),\quad \varphi(t+L)=\varphi(t),\quad f(x)\geqslant\alpha>0$$

是面积减少型的，故 S 的面积为零；但 S 未必限制于仅由一点組成。例如

$$\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu bx^3=\mu F\cos\omega t \tag{16.1}$$

在 $0<\mu\ll1$, $b>0$, $c>0$, $\omega\approx1$ 的假定下来看 S 的形状(詳細参閱第4章)。当 $\omega<1+(\sqrt{3}/2)\mu c$ 则 S 是一点，而当 $\omega>1+(\sqrt{3}/2)\mu c$ 时，根据 F 不同的值，S 有不同的形狀(图16.1)。令 F 由0逐漸增加。$F<F_0(\omega)$ 时 S 是一个完全稳定不动点(图16.1(1))；F 經过 $F_0(\omega)$ 时，S 如图16.1(2)那样，此处 A_2 和 C_2 是完全稳定，B_2 是正不稳定不动点。在 F 增大时，B_3 靠近 C_3，如图16.1(3)；当 F 到达 $F_1(\omega)$ 时，B_3 与 C_3 重合，F 超过 $F_1(\omega)$ 时，S 仅有一个完全稳定不动点(图16.1(4))。此处

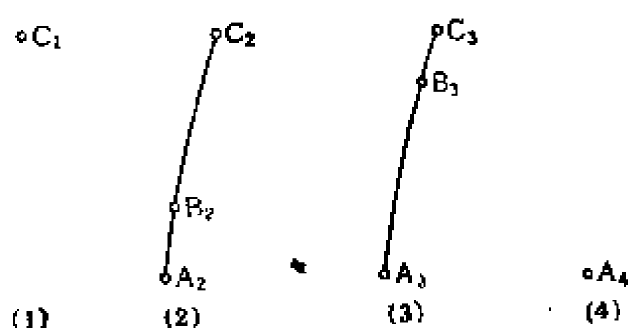


图 16.1

$$F_0^2(\omega)=8(81b)^{-1}[u^3+9c^2u-(u^2-3c^2)^{3/2}],$$

$$F_1^2(\omega)=8(81b)^{-1}[u^3+9c^2u+(u^2-3c^2)^{3/2}],$$

$$u=(\omega^2-1)/\mu.$$

可見当方程所含有的某参数(这里是 F)連續变化时，S 的形状可有不連續的变化。

第4章　非自治系統的解析方法

在实际例子中，用方程

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\ \dot{x},\ \omega t)\quad (0<\mu\ll 1)\tag{4}$$

显示振动现象的重要事物是很多的。本章說明这方程的解析处理方法。这里 $f(x, y, z)$ 是 x, y, z 的实解析函数，且是关于 z 以 2π 为周期的周期函数。

(4)式的解的形状和(2)式不一样，它不一定限制在周期解。但由于周期解重要，所以在 § 17～§ 20 仍然論述周期解；§ 21，§ 22 說明一般的近似解法。同时由这种解法所得到解的性质在实际现象中所适合的程度則在 § 23 說明。

§ 17　攝　动　法

当 $\mu=0$ 时(4)式的解常以 2π 为周期。当 $0<\mu\ll 1$ 时，(4)式是否具有周期 $2\pi/\omega$ 的解是个問題。实际上，ω 的値接近于1时(与 μ 有关)，一般有周期为 $2\pi/\omega$ 的解存在。这里来叙述由存在条件和攝动法求周期为 $2\pi/\omega$ 的解的方法。

取 $\omega t=\tau$，变 τ 为独立变数，代入(4)式考虑下列方程：

$$\omega^2x''+x=\mu f(x,\ \omega x',\ \tau+\delta),\quad \left(x'=\frac{dx}{d\tau}\right).\tag{17.1}$$

这里于右边用 $\tau+\delta$ 代 τ，以便求得满足 $x'(0)=0$ 的周期解。应用第2章 § 9 的 ξ，此处为了簡单仍旧用 x。則

$$x=x_0+\mu x_1+\cdots,\quad \omega=1+\mu\omega_1+\cdots.\tag{17.2}$$

代入(17.1)，令 μ 的冪級数的各个系数为相等，由于設 $x_0=A\cos\tau$，所以 ω_i，x_i 可順次确定(x_i 具有 2π 周期)。这个过程

和§9相同，所以省略不写。唯一不同之处是这里f明显地含有τ，因此要注意含有未知数δ。

設

$$f_1(A,\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f]\cos\tau\,d\tau,$$

$$g_1(A,\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f]\sin\tau\,d\tau,$$

$$[f]=f(A\cos\tau,\ -A\sin\tau,\ \tau+\delta),$$

则对应于(9.6)，(9.7)下列关系成立：

$$f_1(A,\delta)+2\omega_1 A=0, \tag{17.3}$$

$$g_1(A,\delta)=0. \tag{17.4}$$

同时对应于条件(9.8)有

$$A\cdot\partial g_1(A,\delta)/\partial A\neq 0. \tag{17.5}$$

設对满足(17.3)，(17.4)的A，δ，ω_1，(17.5)成立，象上面所述一样，确定級数(17.2)。它是否收斂是一問題。此处不来直接表示收斂性而代以关于μ解析的周期解的存在問題。

首先，不难知道微分方程

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x},\omega t+\delta) \tag{17.6}$$

和初始条件　　$x(0)=A,\quad \dot{x}(0)=0$

是和下列积分方程等价的：

$$x(t)=A\cos t+\mu\int_0^t f(x(s),\dot{x}(s),\omega s+\delta)\sin(t-s)\,ds. \tag{17.7}$$

在閉区域

$$|x-A|\leqslant 3|A|,\quad |y|\leqslant 3|A|,\quad |z|\leqslant\pi,$$

$|f(x,y,z)|$的最大値設为M，在$\mu<|A|/(3\pi M)$时，(17.7)的解于$|t|\leqslant 3\pi$存在而可用逐次逼近法表示出来：

$$x^{(1)}=A\cos t,\quad \dot{x}^{(1)}=-A\sin t.$$

取

$$x^{(n+1)}(t)=A\cos t+\mu\int_0^t f(x^{(n)}(s),\dot{x}^{(n)}(s),\omega s+\delta)\sin(t-s)\,ds,$$

顺次作出 $x^{(n)}(t)$ $(n=1,2,\cdots)$，因此在上述条件下，在 $|t|\leqslant 3\pi$，可直接理解有

$$|x^{(n)}-A|\leqslant 3|A|,\quad |\dot{x}^{(n)}|\leqslant 3|A|.$$

其次設

$$d_n=|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|+|\dot{x}^{(n+1)}(t)-\dot{x}^{(n)}(t)|,$$

在

$$|x-A|\leqslant 3|A|,\quad |y|\leqslant 3|A|,\quad |z|\leqslant \pi$$

时，由于满足

$$|f_x(x,y,z)|\leqslant L,\quad |f_y(x,y,z)|\leqslant L$$

的 L 存在，所以

$$d_1\leqslant 2\mu M|t|$$

和

$$d_{k+1}\leqslant 2\mu L d_k|t|/k❶.$$

因而

$$d_k\leqslant (2\mu M)(2\mu L)^{k-1}|t|^k/k!.$$

从而

$$|x^{(n+m)}(t)-x^{(n)}(t)|\leqslant\sum_{k=n}^{n+m-1}d_k\leqslant 2\mu M\sum_{k=n}^{n+m-1}\frac{(2\mu L)^{k-1}|t|^k}{k!}.$$

因而当 $n\to\infty$ 时，

$$|x^{(n+m)}(t)-x^{(n)}(t)|$$

一致收斂于零。同样，

$$|\dot{x}^{(n+m)}(t)-\dot{x}^{(n)}(t)|$$

也一致收斂于零，因此

$$x^{(n)}(t),\quad \dot{x}^{(n)}(t)$$

分别一致收斂于 $x(t)$，$y(t)$. 因为

$$x^{(n)}(t)=A+\int_0^t\dot{x}^{(n)}\,dt,$$

故

$$x(t)=A+\int_0^t y\,dt,$$

故 $y=\dot{x}$. 这表示了在 $|t|\leqslant 3\pi$ (17.7)的解存在。

那末(17.7)的解

$$x=x(t;\ A,\delta,\mu)$$

---

❶ 原书为 $d_{k+1}\leqslant 2\mu L d_k|t|$. ——校者注

具有周期 $T=2\pi/\omega$ 的条件可写为

$$x(2\pi/\omega;\ A,\delta,\mu)=A,\quad \dot{x}(2\pi/\omega;\ A,\delta,\mu)=0. \tag{17.8}$$

此处由于 $\mu=0$ 的情况中，

$$\omega=1,\quad x(t;\ A,\delta,0)=A\cos t,$$

所以对任意的 A (17.8) 成立。在 $\mu\neq0$ 的情况，則沒有这綫索，要象下面那样地仔細作，即，

$$2\pi/\omega=2\pi+\mu\eta.$$

代入(17.8)而考虑下列式子：

$$\left.\begin{aligned}P&\equiv P(A,\delta,\eta;\ \mu)\equiv\mu^{-1}(A-x(2\pi+\mu\eta;A,\delta,\mu))=0,\\ Q&\equiv Q(A,\delta,\eta;\ \mu)\equiv-\mu^{-1}\dot{x}(2\pi+\mu\eta;\ A,\delta,\mu)=0,\end{aligned}\right\} \tag{17.9}$$

写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}P&=A\mu^{-1}(1-\cos\mu\eta)\\&\quad+\int_0^{2\pi+\mu\eta}f(x(s),\dot{x}(s),\omega s+\delta)\sin(s-\mu\eta)ds=0,\\ Q&=A\mu^{-1}\sin\mu\eta\\&\quad-\int_0^{2\pi+\mu\eta}f(x(s),\dot{x}(s),\omega s+\delta)\cos(s-\mu\eta)ds=0.\end{aligned}\right\} \tag{17.10}$$

因此 P, Q 皆为 μ, η 和 δ 的解析函数。而(17.8) 在 $\mu=0$ 时 $P=0$, $Q=0$, 一般不为恒等式。$\mu=0$ 时 P, Q 分别表以 P_0, Q_0, 如

$$[f]=f(A\cos s,\ -A\sin s,\ s+\delta),$$

則

$$\left.\begin{aligned}P_0&\equiv P_0(A,\delta)=\int_0^{2\pi}[f]\sin s\,ds,\\ Q_0&\equiv Q_0(A,\delta,\eta)=A\eta-\int_0^{2\pi}[f]\cos s\,ds.\end{aligned}\right\} \tag{17.11}$$

若 $A=A_0$, $\eta=\eta_0$, $\delta=\delta_0$ 満足 $P_0=0$, $Q_0=0$, 又 $A=A_0$, $\eta=\eta_0$, $\delta=\delta_0$ 时函数行列式 $\partial(P_0,Q_0)/\partial(A,\eta)\left(=A\dfrac{\partial P_0}{\partial A}\right)\neq0$, 則在 $\mu=0$ 的邻近証明了能确定出收斂的冪級数 $A=A(\mu)$, $\eta=\eta(\mu)$ $(A(0)=A_0,\ \eta(0)=\eta_0)$, 滿足

$$P(A(\mu),\delta_0,\eta(\mu);\ \mu)=0,\quad Q(A(\mu),\delta_0,\eta(\mu);\ \mu)=0.$$

又明显地

$$x(t;\ A(\mu),\delta_0,\mu)$$

和周期

$$2\pi/\omega=2\pi+\mu\eta(\mu)$$

在 $\mu=0$ 的邻近有关于 μ 的正則解。

以上考虑了(17.6)，可见在某些条件下(满足(17.3)，(17.4)的 A，δ，ω_1 对(17.5)成立)，方程(17.1)在 $\mu=0$ 的邻近处有周期为 2π，对 μ 为正则的解((17.11)中的 $P_0=0$，$Q_0=0$ 分别对应于(17.4)，(17.3))，上述的

$$\partial(P_0, Q_0)/\partial(A, \eta)\neq 0$$

则对应于(17.5))。将这解写作

$$x(\tau)=A_0\cos\tau+\mu x_1(\tau)+\mu^2 x_2(\tau)+\cdots,$$

$x_i(\tau)$ $(i\geqslant 1)$ 要以 2π 为周期，以此节开始所述的方法决定之。

由(17.10)消去 δ，于 $2\pi/\omega=2\pi+\mu\eta$ 将 η 写为 ω 的关系式

$$R(A, \omega;\ \mu)=0$$

表示平面 (ω, A) 上的曲线称为**共振曲线**。它可用由

$$P_0(A, \delta)=0,\quad Q_0(A, \delta, \eta)=0$$

导出的关系式：$R(A, \omega)=0$ 近似地代替。

对于满足

$$P_0(A, \delta)=0,\quad Q_0(A, \delta, \eta)=0$$

的 A_0，δ_0，η_0 有

$$\partial(P_0, Q_0)/\partial(\delta, \eta)\neq 0$$

或者

$$\partial(P_0, Q_0)/\partial(A, \delta)\neq 0$$

时，同上面一样，在各种情况象满足(17.9)那样来确定[❶]

$$A=A_0,\quad \delta=\delta(\mu),\quad \eta=\eta(\mu),\quad \delta(0)=\delta_0,\quad \eta(0)=\eta_0;$$
$$A=A(\mu),\quad \delta=\delta(\mu),\quad \eta=\eta_0,\quad A(0)=A_0,\quad \delta(0)=\delta_0$$

($\delta(\mu)$，$\eta(\mu)$；$A(\mu)$，$\delta(\mu)$ 是 μ 的收敛幂级数)。这里考虑前一种情况，即 $A=A_0$ 为固定的情况，叙述求解的方法。将 $\delta=\delta_0+\mu\delta_1+\cdots$ 和(17.2)代入(17.1)，由 μ 的幂为等值确定 x_i,ω_i,δ_i：由 $x_0=A_0\cos\tau$ 可确定 x_n $(n\geqslant 1)$，而由方程右边不能有含 $\sin\tau$，$\cos\tau$ 的项来确定 ω_n，δ_{n-1}，这就有了初始条件：$x_n(0)=\dot{x}_n(0)=0$ 的解，这时

---

❶ 下面是两种不同的情况，一是先固定 A，$A=A_0$；另一种是先固定 η，$\eta=\eta_0$。——校者注

$$P_0(A_0, \delta_0) = Q_0(A_0, \delta_0, \eta_0) = 0$$

滿足

$$A_0, \delta_0, \eta_0(= -2\pi\omega_1)$$

对于

$$\partial(P_0, Q_0)/\partial(\delta, \eta) = A(\partial P_0/\partial\delta)$$

而 $\neq 0$ 給定(17.2)收斂的充分条件。

此节叙述的方法($\delta=\delta_0$ 固定的)是在对滿足 $P_0=Q_0=0$ 的 A_0, δ_0, η_0 而对于

$$\partial(P_0, Q_0)/\partial(A, \eta) = A\cdot(\partial P_0/\partial A) \neq 0$$

时的充分条件。例如

$$\ddot{x}+x=\mu(f(x)+F\cos(\omega t+\delta))$$

的情况，$\partial P_0/\partial A=0$ 而

$$\partial P_0/\partial\delta = -\pi F\cos\delta,$$

$P_0=0$ 即 $\delta=0, \pi$，而 $\partial P_0/\partial\delta\neq 0$。

以上是(4)式的周期为 $2\pi/\omega$ 的解的求法，其次給出判定稳定的条件。

以 $\omega t=\tau$ 代入后得(17.1)，設(17.1)周期为 2π 的解是 $x_0(\tau)$，$x_0(\tau)$ 对应的变分方程为

$$\omega^2\xi''-\mu\omega\{f_{\dot{x}}\}\xi'+(1-\mu\{f_x\})\xi=0,$$
$$\{f\}=f(x_0(\tau), \omega x_0'(\tau), \tau+\delta),$$

把它写成下列形式：

$$\xi''+(\mu h_1(\tau)+\mu^2h_2(\tau)+\cdots)\xi'$$
$$+(1+\mu g_1(\tau)+\mu^2g_2(\tau)+\cdots)\xi=0. \tag{17.12}$$

$\xi(\tau)$，$\eta(\tau)$ 皆为(17.12)的解，滿足 $\xi(0)=1$, $\xi'(0)=0$, $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=1$. 研究 $x_0(\tau)$ 的稳定性，就要知道 $\xi(2\pi)$, $\xi'(2\pi)$, $\eta(2\pi)$, $\eta'(2\pi)$. 于是将

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\xi_0+\mu\xi_1+\mu^2\xi_2+\cdots,\\ \eta&=\eta_0+\mu\eta_1+\mu^2\eta_2+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{17.13}$$

代入(17.12)，則

$$\xi_0''+\xi_0=0,\quad \xi_1''+\xi_1=-h_1(\tau)\xi_0'-g_1(\tau)\xi_0,\ \cdots,$$
$$\xi_0(0)=1,\quad \xi_0'(0)=0,\quad \xi_n(0)=\xi_n'(0)=0\quad (n\geqslant 1).$$

从而

$$\left.\begin{aligned}&\xi_0(\tau)=\cos\tau,\\&\xi_1(\tau)=\int_0^\tau[h_1(\theta)\sin\theta-g_1(\theta)\cos\theta]\sin(\tau-\theta)d\theta.\end{aligned}\right\}\quad(17.14)$$

同样

$$\left.\begin{aligned}&\eta_0(\tau)=\sin\tau,\\&\eta_1(\tau)=-\int_0^\tau[g_1(\theta)\sin\theta+h_1(\theta)\cos\theta]\sin(\tau-\theta)d\theta❶.\end{aligned}\right\}\quad(17.15)$$

其次，設

$$L=\xi(2\pi)\eta'(2\pi)-\xi'(2\pi)\eta(2\pi),$$
$$M=1-[\xi(2\pi)+\eta'(2\pi)]+L,$$
$$N=1+[\xi(2\pi)+\eta'(2\pi)]+L,$$

則按照第3章§14，

$$D(0)=L,\quad D(+1)=M,\quad D(-1)=N.$$

因而 $x_0(\tau)$ 是：

1) 当 $L<1,\ M>0,\ N>0$ 时，完全稳定周期解；

2) 当 $L>1,\ M>0,\ N>0$ 时，完全不稳定周期解；

3) 当 $M<0$ 时，正不稳定周期解；

4) 当 $N<0$ 时，逆不稳定周期解。

由(17.13)，

$$L=1+[\xi_1(2\pi)+\eta_1'(2\pi)]\mu+\cdots,$$
$$M=[\xi_1(2\pi)\eta_1'(2\pi)-\xi_1'(2\pi)\eta_1(2\pi)]\mu^2+\cdots,$$
$$N=3+2[\xi_1(2\pi)+\eta_1'(2\pi)]\mu+\cdots,$$

此处由于 $N>0$ $(\mu\ll 1)$，所以在(4)式中不会出現逆不稳定周期解。

---

❶ 原书方括号中的“+”号誤为“−”。——校者注

其次，由(17.14)，(17.15)，

$$\xi_1(2\pi)=\int_0^{2\pi}[g_1(\theta)\cos\theta-h_1(\theta)\sin\theta]\sin\theta\,d\theta,$$

$$\xi_1'(2\pi)=\int_0^{2\pi}[-g_1(\theta)\cos\theta+h_1(\theta)\sin\theta]\cos\theta\,d\theta,$$

$$\eta_1(2\pi)=\int_0^{2\pi}[h_1(\theta)\cos\theta+g_1(\theta)\sin\theta]\sin\theta\,d\theta,$$

$$\eta_1'(2\pi)=-\int_0^{2\pi}[h_1(\theta)\cos\theta+g_1(\theta)\sin\theta]\cos\theta\,d\theta.$$

另一方面，由(17.12)

$$\left.\begin{aligned}h_1(\tau)&=-[f_{\dot{x}}]=-f_{\dot{x}}(A\cos\tau,\ -A\sin\tau,\ \tau+\delta),\\ g_1(\tau)&=-2\omega_1-[f_x]\\ &=-2\omega_1-f_x(A\cos\tau,\ -A\sin\tau,\ \tau+\delta).\end{aligned}\right\}\quad(17.16)$$

此处

$$\left.\begin{aligned}[][f_x]&=\alpha_0/2+\sum(\alpha_n\cos n\tau+\beta_n\sin n\tau),\\ [f_{\dot{x}}]&=\gamma_0/2+\sum(\gamma_n\cos n\tau+\delta_n\sin n\tau),\end{aligned}\right\}\quad(17.17)$$

则

$$\xi_1(2\pi)=\frac{\pi}{2}(\gamma_0-\beta_2-\gamma_2),$$

$$\xi_1'(2\pi)=\frac{\pi}{2}(4\omega_1+\alpha_0+\alpha_2-\delta_2),$$

$$\eta_1(2\pi)=\frac{\pi}{2}(\alpha_2-\alpha_0-\delta_2-4\omega_1),$$

$$\eta_1'(2\pi)=\frac{\pi}{2}(\beta_0+\gamma_0+\gamma_2).$$

因而

$$\xi_1(2\pi)+\eta_1'(2\pi)=\pi\gamma_0,$$

$$\xi_1(2\pi)\eta_1'(2\pi)-\xi_1'(2\pi)\eta_1(2\pi)=\frac{\pi^2}{4}M_0,$$

其中 $M_0=(4\omega_1+\alpha_0)^2+\gamma_0^2-(\alpha_2-\delta_2)^2-(\beta_2+\gamma_2)^2$. 所以

$$L=1+\pi\gamma_0\mu+\cdots,$$

$$M=\pi^2 M_0\mu^2/4+\cdots,$$

$$N=3+2\pi\gamma_0\mu+\cdots.$$

綜合以上所述，从(17.17)确定 α_n, β_n, γ_n, δ_n, 算出

$$M_0=(4\omega_1+\alpha_0)^2+\gamma_0^2-(\alpha_2-\delta_2)^2-(\beta_2+\gamma_2)^2,$$

則問題的周期解的稳定性判别如下：

$\gamma_0<0$, $M_0>0$ 时，周期解完全稳定；

$\gamma_0>0$, $M_0>0$ 时，周期解完全不稳定；

$M_0<0$ 时，周期解为正不稳定。

再有，这里不出現逆不稳定的周期解。

此外，下列关系成立：

$$(4\omega_1+\alpha_0-\alpha_2+\delta_2)\frac{d(\omega^2)}{d(A^2)}=-\mu\frac{M_0}{4A^2}+O(\mu^2). \quad (17.18)$$

这可証明如下：$\omega^2=1+2\omega_1\mu+O(\mu^2)$.

由(17.3)和

$$\frac{d(\omega^2)}{d(A^2)}=\frac{\mu}{2A^2}\left(-2\omega_1-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dA}\int_0^{2\pi}[f]\cos\tau\,d\tau\right)+O(\mu^2).$$

因为

$$\int_0^{2\pi}[f]\cos\tau\,d\tau=\int_0^{2\pi}f(A\cos(\tau-\delta),-A\sin(\tau-\delta),\tau)\cos(\tau-\delta)d\tau,$$

因而

$$\frac{d}{dA}\int_0^{2\pi}[f]\cos\tau\,d\tau=\frac{\pi}{2}[\alpha_0+\alpha_2-\delta_2+(\gamma_0+\gamma_2+\beta_2)A(\partial\delta/\partial A)].$$

另一方面，

$$\int_0^{2\pi}[f]\sin\tau\,d\tau=0,$$

故

$$(\beta_2+\gamma_2-\gamma_0)+(4\omega_1+\alpha_0-\alpha_2+\delta_2)A(\partial\delta/\partial A)=0.$$

从而

$$\begin{aligned}&(4\omega_1+\alpha_0-\alpha_2+\delta_2)(d(\omega^2)/d(A^2))\\&=\mu(4A^2)^{-1}[(-4\omega_1-\alpha_0-\alpha_2+\delta_2)(4\omega_1+\alpha_0-\alpha_2+\delta_2)\\&\quad+(\beta_2+\gamma_2-\gamma_0)(\beta_2+\gamma_2+\gamma_0)]+O(\mu^2)\end{aligned}$$

$$=\mu(4A^2)^{-1}[-(4\omega_1+\alpha_0)^2-(\alpha_2-\delta_2)^2+(\beta_2+\gamma_2)^2-\gamma_0^2]+O(\mu^2).$$

于是共振曲綫斜率 $dA/d\omega$ 的正負号即由

$$S\equiv\alpha_0-\alpha_2+\delta_2+4\omega_1$$

和 M_0 的正負号确定。

又考虑将 $\eta=\eta_0$ 固定了的攝动法，对于满足 $P_0=0$，$Q_0=0$ 的 A，δ，η，

$$\partial(P_0,\ Q_0)/\partial(A,\ \delta)=(\pi^2/4)AM_0$$

(这計算是容易的)。在 $M_0\neq0$ 时，这是收斂的充分条件。

在完全稳定解邻近的解，靠近它的速度，由(13.1)，(14.2)可知，以 $\exp(\mu\pi\gamma_0)$ 为其特征 $\left([P_x]=0,\ [Q_y]=\mu[f_{\dot{x}}],\ \int_0^{2\pi}\mu[f_{\dot{x}}]dt=\mu\pi\gamma_0\right)$。 ●

下面举出取 $\omega=\omega(\mu)\approx1$，周期为 $2\pi/\omega$ 的解的求法和判别稳定性的例子。这些例子的物理内容在以后再説明(§23)。

例1　$\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu bx^3=\mu F\cos\omega t\quad(0<\mu\ll1,\ c>0)$.

首先求周期解

$$[f]=cA\sin\tau-bA^3\cos^3\tau+F\cos(\tau+\delta).$$

由(17.3)

$$2\omega_1A+F\cos\delta-3bA^3/4=0.$$

由(17.4)

$$cA-F\sin\delta=0.$$

由条件(17.5) $Ac\neq0$，固定 δ，用攝动法可得周期解。

$$x_0=A\cos\tau,\quad \omega_1=(3/8)bA^2\pm(2A)^{-1}(F^2-c^2A^2)^{1/2},$$

$$x_1=-A\omega_1\cos\tau+(1/32)bA^3\cos3\tau,\cdots.$$

此外，共振曲綫的方程是

$$\omega^2=1+2\omega_1\mu+O(\mu^2)=1+[(3/4)bA^2\pm(F^2/A^2-c^2)^{1/2}]\mu+O(\mu^2).$$

图17.1是 F 作各种变化时的图形，左图为 $b>0$，右图为 $b<0$ 的情况。图中虚綫表示共振曲綫有垂直切綫的点的軌迹，它的方程是

$$\omega^2=1+(1/2)\{3bA^2\pm[(9/4)b^2A^4-4c^2]^{1/2}\}\mu-O(\mu^2).$$

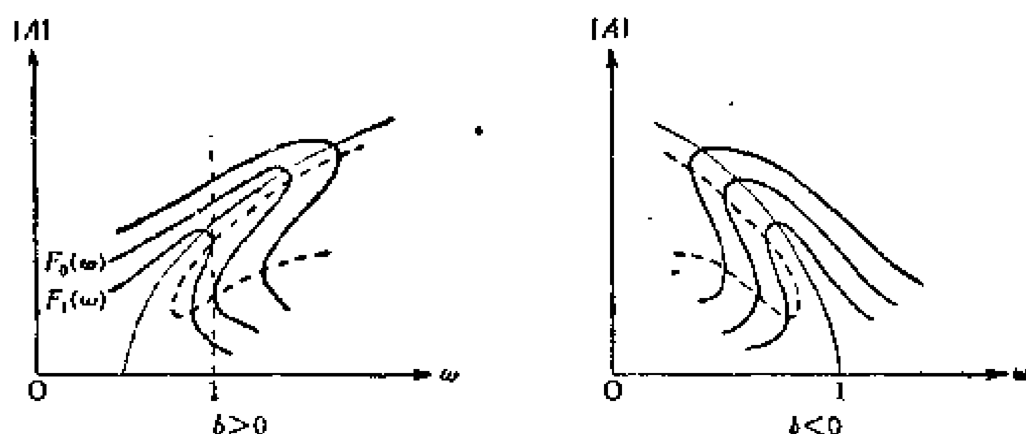


图 17.1

若 $b>0$，当 μ 充分小时，設

$$\omega^2<1+\sqrt{3}c\mu,$$

对此 ω 周期解只有一个；設

$$\omega^2>1+\sqrt{3}c\mu,$$

对此 ω，可确定 $F_0(\omega)$，$F_1(\omega)$，$F<F_0(\omega)$ 或 $F_1(\omega)<F$ 时周期解有一个；而当

$$F_0(\omega)<F<F_1(\omega)$$

时，周期解有三个。由图 17.1 这是明显的，而 F_0，F_1 也容易計算出来（其值在 §16 最后）。同样可討論 $b<0$ 的情况。

其次研究上面所求周期解的稳定性。

$$[f_x]=-(3/2)bA^2(1+\cos 2\tau),\quad [f_{\dot{x}}]=-c,\quad \alpha_0=-3bA^2,$$
$$\alpha_2=-(3/2)bA^2,\quad \beta_2=0,\quad \gamma_0=-2c,\quad \gamma_2=\delta_2=0,$$
$$M_0=(4\omega_1-3bA^2)^2+4c^2-(9/4)b^2A^4.$$

从而

$$\omega^2=1+[(3/4)bA^2+S]\mu+\cdots,\quad S=\alpha_0-\alpha_2+\delta_2+4\omega_1.$$

当 $b>0$ 时，在

$$\omega^2<1+(3/4)bA^2\mu,$$

由于 $S<0$ 和 $d(\omega^2)/d(A^2)>0$，所以 $M_0>0$。在

$$\omega^2>1+(3/4)bA^2\mu,$$

由于 $S>0$，M_0 和 $d(\omega^2)/d(A^2)$ 异号。从而在虚綫内侧 $M_0<0$，外侧 $M_0>0$。結果是，在虚綫内侧对应的周期解是正不稳定的，在外侧对应的周期解完全稳定。再者，在 $b<0$ 时也可得到同样的結果。

例2 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=\mu F\cos\omega t \quad (0<\mu\ll 1)$.

(17.3)是

$$F\cos\delta+2\omega_1 A=0,$$

(17.4)是

$$A^3/4-A-F\sin\delta=0,$$

(17.5)是

$$A(3A^2-4)\neq 0.$$

固定δ，根据摄动法，

$$x_0=A\cos\tau,\quad 4\omega_1^2=F^2A^{-2}-(1-A^2/4)^2,$$

$$x_1=\omega_1 A(1-A^2/4)\cos\tau+(3/32)A^3\sin\tau-(1/32)A^3\sin 3\tau,\ \cdots.$$

其次考虑稳定性。由

$$[f_x]=A^2\sin 2\tau,\quad [f_{\dot{x}}]=1-(A^2/2)(1+\cos 2\tau),$$

$$\alpha_0=\alpha_2=0,\quad \beta_2=A^2,\quad \gamma_0=2-A^2,\quad \gamma_2=-A^2/2,\quad \delta_2=0,$$

$$M_0=16[\omega_1^2+(1-A^2/4)(1-3A^2/4)/4].$$

$M_0=0$ 是(ω_1, A^2)平面上一个椭圆，其中心为$(0,8/3)$，其短軸(长$1/\sqrt{3}$)，长軸(长8/3)分别平行于ω_1-軸和A^2-軸。在这椭圆内$M_0<0$，椭圆外$M_0>0$。从而椭圆内的点对应的周期解是正不稳定，椭圆外，$A^2<2$时完全不稳定，$A^2>2$时完全稳定(图17.2)❶。

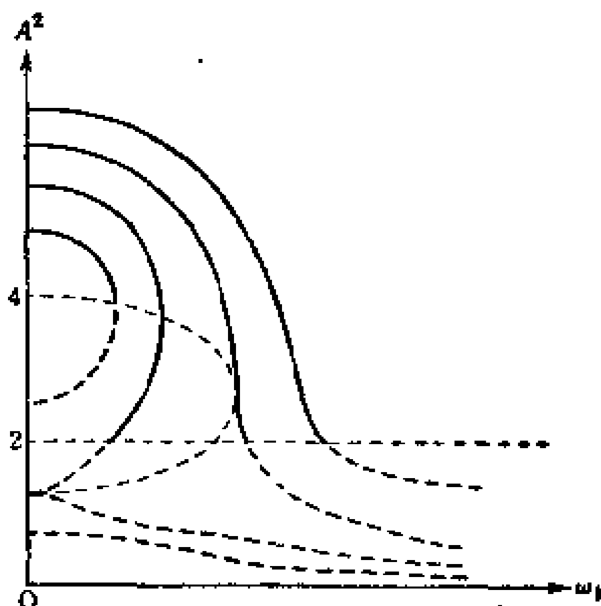


图 17.2

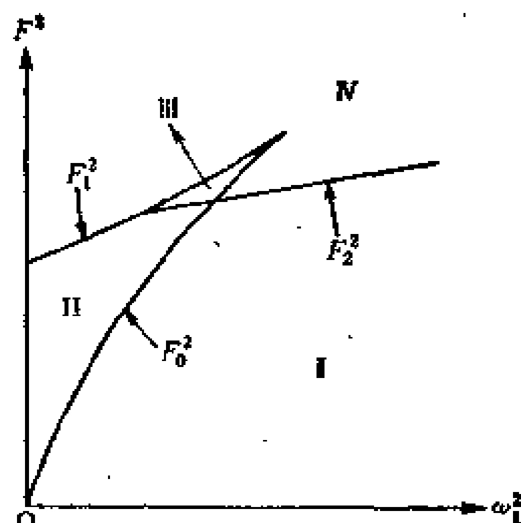


图 17.3

❶ 图中A^2和ω_1的比例尺不同，椭圆$M_0=0$的最右点的ω_1为$1/\sqrt{12}=0.289$. ——校者注

图 17.3 是周期 $2\pi/\omega$ 的周期解的个数和它的稳定性在平面 (ω_1^2, F^2) 上的图示❶。图中 I, II, III, IV 四个区域的边界由下列方程給出:

$$F_0^2(\omega_1^2)=(8/27)[36\omega_1^2+1-(1-12\omega_1^2)^{3/2}],$$

$$F_1^2(\omega_1^2)=(8/27)[36\omega_1^2+1+(1-12\omega_1^2)^{3/2}],$$

$$F_2^2(\omega_1^2)=8\omega_1^2+1/2, \quad \omega_1^2>1/16.$$

周期为 $2\pi/\omega$ 的解，在 I 中有一个，完全不稳定；在 II 中，完全稳定，完全不稳定和正不稳定各一个，共計三个；在 III 中，完全稳定两个，正不稳定一个，共計三个；在 IV 中，完全稳定一个。

例 3 $\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu bx^3-2\mu q(\cos 2\omega t)x=0 \quad (c>0,\ 0<\mu\ll 1)$.

求周期为 $2\pi/\omega$ 的解。由于(17.5)不成立，所以可用固定 η (或 A)，而不用固定 δ. $P_0=0$, $Q_0=0$ 是

$$c-q\sin 2\delta_0=0, \quad (\eta_0/\pi)+(3/4)bA_0^2=q\cos 2\delta_0,$$

同时

$$M_0=12bqA_0^2\cos 2\delta_0,$$

所以

$$bq\cos 2\delta_0=(b\eta_0/\pi)+(3/4)b^2A_0^2\neq 0.$$

这时由摄动法可得下列解。即于

$$\omega^2x''+\mu c\omega\dot{x}+x+\mu bx^3-2\mu qx\cos 2(\tau+\delta)=0,$$

$$\omega^{-1}=1+\eta\mu/(2\pi), \quad x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\cdots, \quad \delta=\delta_0+\mu\delta_1+\mu^2\delta_2+\cdots,$$

比較 μ 的同次幂項，首先有 $x_0=A\cos\tau$，其次有确定 $x_n(n\geq 1)$ 的方程，根据右边 Fourier 展开式不含有 $\sin\tau$, $\cos\tau$ 的項，确定 $x_{n-1}(0)$, δ_{n-1}，并順次求 $x_n'(0)=0$ 的解。其中 $x_n(0)$ 未定而按照周期 2π 調节 x_{n+1}. 这样得到的周期解，当 $M_0>0$ 时完全稳定，$M_0<0$ 时正不稳定。特别在 $\omega=1$ 即 $\eta=0$ 的場合 $c<|q|$ 时有 2π 周期的完全稳定解($\neq 0$).

再在 $b=0$ (綫性)时，考慮固定 A 而不固定 η. 这时在

$$\partial(P_0, Q_0)/\partial(\delta, \eta)=-2\pi A^2q\cos 2\delta_0\neq 0$$

的情形下可确定周期解($\neq 0$). 这时 $M_0=0$ 为周期系数齐次綫性方程(这是衰减的 Mathieu 方程)的解。由此解的形式可知沒有完全稳定的周期解。若 $b\neq 0$ 則成为非綫性型，当 $c<|q|$ 时有完全稳定的周期解($\neq 0$).

---

❶ 这个图沒有照比例画，实际上区域 III 很小。——校者注

§18 綫性化法

第2章§11的綫性化的方法也适用于这种情况。令 $\omega t=\tau$，方程

$$\omega^2x''+x=\mu f(x,\ \omega x',\ \tau)$$

有近似解

$x=\rho\cos(\tau-\theta)$，　$x'=-\rho\sin(\tau-\theta)$　（ρ, θ 是未定常数），

将 $f(\rho\cos(\tau-\theta),\ -\rho\omega\sin(\tau-\theta),\ \tau)$ Fourier 展开的基本諧波项 $f_1(\rho,\theta)\cos(\tau-\theta)+g_1(\rho,\theta)\sin(\tau-\theta)$ 近似地以 $[f_1(\rho,\theta)x-g_1(\rho,\theta)x']\rho^{-1}$ 代之，則导出**等价綫性方程**

$$\omega^2x''+\mu\rho^{-1}g_1(\rho,\ \theta)x'+(1-\mu\rho^{-1}f_1(\rho,\ \theta))\,x=0. \tag{18.1}$$

若

$$\omega^2=1-\mu\rho^{-1}f_1(\rho,\ \theta),\quad g_1(\rho,\ \theta)=0, \tag{18.2}$$

則有上述解，这里

$$f_1(\rho,\ \theta)=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\varphi,\ -\rho\omega\sin\varphi,\ \varphi+\theta)\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$g_1(\rho,\ \theta)=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\varphi,\ -\rho\omega\sin\varphi,\ \varphi+\theta)\sin\varphi\,d\varphi.$$

如在右端令 $\omega=1$，則与§17的 f_1, g_1 一致。而(18.2)确定对应于(17.3)，(17.4)的 ρ, θ.

例　鉄諧振 (ferro-resonance) **回路**(图18.1)　含有鉄芯的电感中电流 i 和电路通連的磁通量（磁通量和綫圈卷数的积）ϕ 之間的关系如图18.2所示，$\phi=f(i)$，这是对原点为对称的非綫性关系。电感两端的电压为 $\dot\phi$，按照 Kh 法則，有

$$\dot\phi+R\dot i+c^{-1}i=E\omega\cos\omega t. \tag{18.3}$$

現考慮电流大致是正弦波的情形，

$$i=I\cos(\omega t-\theta),$$

对于

$$\phi=f(I\cos(\omega t-\theta)),$$

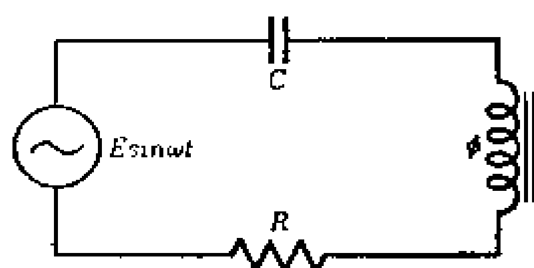


图 18.1

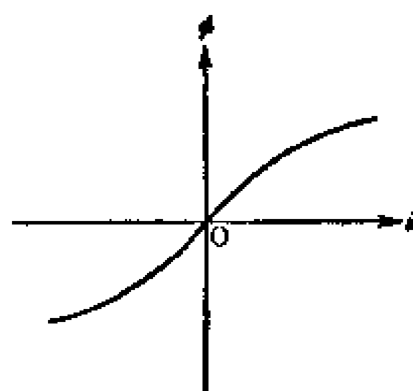


图 18.2

它的 Fourier 展开的第一项近似于

$$\left[\pi^{-1}\int_0^{2\pi} f(I\cos u)\cos u\,du\right]\cos(\omega t-\theta).$$

将 $\phi=f(i)$ 代之以下列綫性关系:

$$\phi=Li,\quad L=\pi^{-1}I^{-1}\int_0^{2\pi} f(I\cos u)\cos u\,du.$$

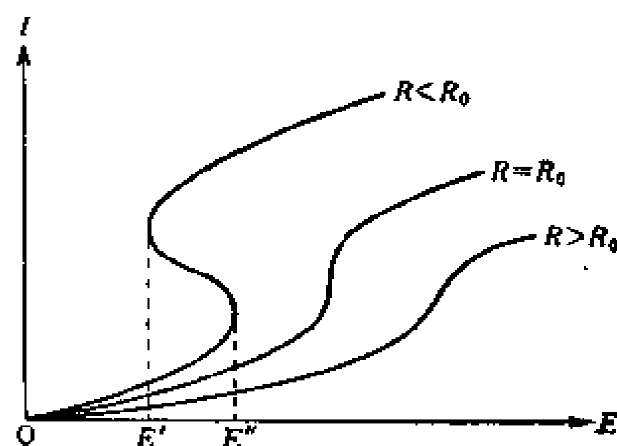


图 18.3

这种情况中 L 是电流振幅 I 的函数,从而(18.3)的綫性化方程是

$$L\ddot{i}+R\dot{i}+C^{-1}i=E\omega\cos\omega t.$$

此处 I,θ 是由 $(C^{-1}\omega^{-1}-L(I)\omega)I=E\cos\theta$, $RI=E\sin\theta$ 决定。由此将 θ 消去,則 E 和 I 的关系如圖 18.3 所示。即在 $R<R_0$ 时,在电压振幅 $E\,(E'<E<E'')$ 某范圍内对应三个 I,在这 E 的范圍外对应一个 I. 在 $R\geqslant R_0$ 时,对于任意的 E 对应一个 I.

再对这問題中考慮 ϕ 比 i 更接近于正弦波形的情形

$$\phi=\Phi\cos(\omega t-\theta),$$

設 $i=g(\phi)$, 由于用

$$i=K\phi,\quad K=K(\Phi)=\pi^{-1}\Phi^{-1}\int_0^{2\pi} g(\Phi\cos u)\cos u\,du$$

代替而得綫性化方程

$$\ddot{\phi}+KR\dot{\phi}+KC^{-1}\phi=E\omega\cos\omega t.$$

确定 Φ,θ 的式子是

$$(KC^{-1}\omega^{-1}-\omega)\Phi=E\cos\theta,\quad KR\Phi=E\sin\theta.$$

特别在

$$i=g(\phi)=a\phi+b\phi^3\quad(a>0,\ b>0)$$

时，得

$$K=a+3b\Phi^2/4,\quad \Phi\sqrt{K^2R^2+(KC^{-1}\omega^{-1}-\omega)^2}=E.$$

因此对給定的 E，在 $R\geqslant R_1$ 时可确定一个 Φ；在 $R<R_1$ 且 $E_1<E<E_2$ 时，对于某一个 E 对应着三个 Φ，在其他的 E 时則可确定为一个 Φ 值。此处

$$E_1^2=A[B(B^2+9R^2\omega^2/a^2)-(B^2-3R^2\omega^2/a^2)^{3/2}],$$

$$E_2^2=A[B(B^2+9R^2\omega^2/a^2)+(B^2-3R^2\omega^2/a^2)^{3/2}],$$

$$A=(8/81)a^3C^4\omega^4b^{-1}(1+R^2C^2\omega^2)^{-2},$$

$$B=(C\omega^2-a)/(a\omega^2C^2)-R^2,$$

$$R_1^2=\frac{C\omega^2-a}{a\omega^2C^2}+\frac{3\omega^2}{2a^2}-\sqrt{\frac{9\omega^4}{4a^4}+\frac{3(C\omega^2-a)}{a^3C^2}}.$$

§19 間歇法

和第2章§10平均法同样考虑[1]。将

$$\omega^2x''+x=\mu f(x,\ \omega x',\ \tau)$$

写成下列形式：

$$x''+x=\mu\omega^{-2}(\sigma x+f(x,\ \omega x',\ \tau)),\quad \omega^2-1=\mu\sigma.\quad(19.1)$$

令設

$$x=\rho\cos(\tau-\theta),\quad x'=-\rho\sin(\tau-\theta),$$

則(ρ, θ 是 τ 的函数) ρ, θ 必須满足下列式子：

$$\rho'=-\mu\omega^{-2}\Phi\sin(\tau-\theta),\quad \rho\theta'=\mu\omega^{-2}\Phi\cos(\tau-\theta),\quad(19.2)$$

其中

$$\Phi\equiv\sigma\rho\cos(\tau-\theta)+f(\rho\cos(\tau-\theta),\ -\rho\omega\sin(\tau-\theta),\ \tau).$$

此处 $\mu\ll1$，将(19.2)右边含有的 ω 設为1，又注意到 ρ', θ' 甚小，右边的 ρ, θ 在 $0\leqslant\tau\leqslant2\pi$ 上可視为常数。若在 $0\leqslant\tau\leqslant2\pi$ 上取平

---

[1] 間歇法、van der Pol（轉动）平面法、慢变振幅法、諧波平衡法、平均法等等，异曲同工，名称各殊，內容类同；所得結果都只是 Н. Н. Боголюбов 漸近方法中的第一次近似。——校者注

均的常数，则得到下列近似方程：

$$\rho' = -\mu g_1(\rho, \theta), \quad \rho\theta' = \mu(\sigma\rho + f_1(\rho, \theta)). \qquad (19.3)$$

此处 f_1, g_1 是 §17 所給定的。自治系統 (19.3) 称为 (19.1) 所对应的**間歇系統** (stroboscopic system) ❶。

(19.3) 的平衡点 (ρ_0, θ_0) 对应于 (19.1) 的近似周期解：$x = \rho_0 \cos(\tau - \theta_0)$. (19.3) 的右边为零的式子和 (17.3), (17.4) 一致。

其次，研究这个解的稳定性。今将 (19.3) 写为

$\rho' = \mu F(\rho, \theta)$, $\theta' = \mu G(\rho, \theta)$ (因而 $F = -g_1$, $G = \sigma + f_1/\rho$),

引变换 $\xi = \rho\cos\theta, \quad \eta = \rho\sin\theta,$

因此由极坐标 (ρ, θ) 变换为直角坐标 (ξ, η) 成为

$$\xi' = \mu X(\xi, \eta), \quad \eta' = \mu Y(\xi, \eta). \qquad (19.4)$$

假若于 (ρ_0, θ_0), (19.4) 对应的平衡点是 (ξ_0, η_0). 在这点的稳定性可由 p, q 的值来判定 ❷。在这种情况中，

$$\begin{aligned}
p &= -\mu(X_\xi + Y_\eta) = -\mu(F_\rho + G_\theta) \\
&= \mu(\partial g_1/\partial\rho - \rho^{-1}\partial f_1/\partial\rho) = -\mu\gamma_0, \\
q &= \mu^2(X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi) = \mu^2(F_\rho G_\theta - F_\theta G_\rho) \\
&= \frac{\mu^2}{\rho}\left[\sigma\frac{\partial g_1}{\partial\theta} - \left(\frac{\partial g_1}{\partial\rho}\frac{\partial f_1}{\partial\theta} - \frac{\partial g_1}{\partial\theta}\frac{\partial f_1}{\partial\rho}\right)\right] = \frac{\mu^2 M_0}{4}.
\end{aligned}$$

所以有以下結果成立 (γ_0, M_0 就是 §17 所給定的)：

1) $p>0$, $q>0$, 即稳定的結点或稳定的焦点时，$M_0>0$, $\gamma_0<0$. 由此可得 $x(\tau) = \rho_0\cos(\tau - \theta_0) = \xi_0\cos\tau + \eta_0\sin\tau$. 这是 (19.1) 的完全稳定解的近似解。

2) $p<0$, $q>0$, 即不稳定的結点或不稳定的焦点时，$M_0>0$, $\gamma_0>0$. 式子 $x(\tau) = \rho_0\cos(\tau - \theta_0) = \xi_0\cos\tau + \eta_0\sin\tau$ 給出 (19.1)

---

❶ stroboscope 頻閃觀測器，利用間歇光源观测机械振动的一种仪器。——校者注

❷ 见第一章，§2。——校者注

完全不稳定解的近似解。

3) $q<0$，即鞍点时，$M_0<0$。$x(\tau)=\rho_0\cos(\tau-\theta_0)=\xi_0\cos\tau+\eta_0\sin\tau$ 給出(19.1)的正不稳定解的近似解。

这种近似法得到結果的正确性，全部与第2章§10相近。又这方法应用的范圍不必一定限于周期解。可以同样地考虑(19.3)平衡点以外的解，可以研究(19.1)的周期解以外的近似解：$x(\tau)=\xi(\tau)\cos\tau+\eta(\tau)\sin\tau$ 的性质。例如設(19.3)具有极限环 $(\xi_1(\tau),\eta_1(\tau))$，$x(\tau)=\xi_1(\tau)\cos\tau+\eta_1(\tau)\sin\tau$ 一般为概周期函数。(4)式的右边不是解析函数也可以应用，这是这个方法的优点。

在 $\mu=0$ 时，(19.1)的解表現为 $(x,\dot{x})$ 平面上某一点沿圓周順时針轉动，圓周的中心在原点，轉动的周期是 2π。如果在一个时間間隔为 2π 的間歇光源(频閃观测器)下观察，这点的运动看来好象一个不动的点。在 $0<\mu\ll1$ 的情况中，在周期为 2π 的間歇光源照耀下，看到的点就作緩慢的运动，这个运动由近似极坐标方程(19.3)——即間歇系統——表示出来。假定間歇系統有平衡点，那么緩慢移动的点的运动就着落这平衡点上。对(19.1)来說，我們所注意的解是漸近于稳定周期解。

例　考虑§18中鉄諧振回路的例子，电感含有鉄芯，电感的特性如图18.2所示，这还是比較簡单的形状，稍微詳細研究的話有下列的情形。設 i 作正弦型的变化，这振幅依次增大如图19.1所示，去的軌道和回来的軌道都不相同。这叫作鉄的滯后(hysteresis)。振幅依次減少时也一样。在这种具有滯后特性的电感鉄諧振回路加上交流电压的情形中，来考虑回路的振动电

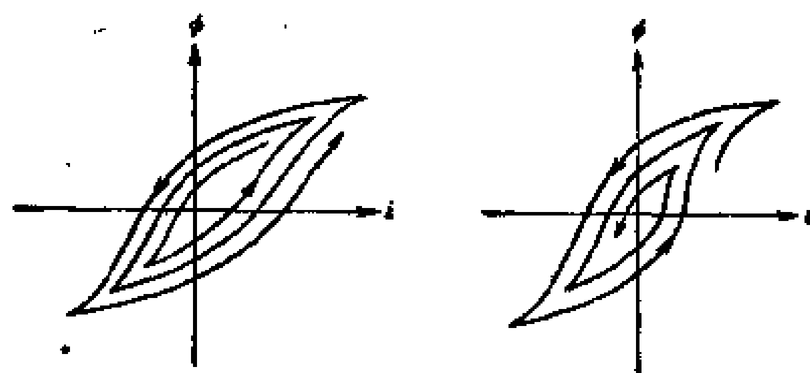


图　19.1

流(或者与电路通連的磁通量)成长了多少,它又接近于怎样的定常状态。又在这定常状态电源电压是零的場合,回路的振动减少了多少。为了研究这情

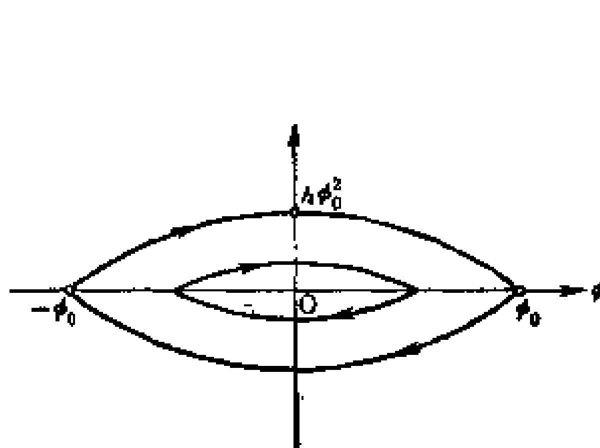


图 19.2

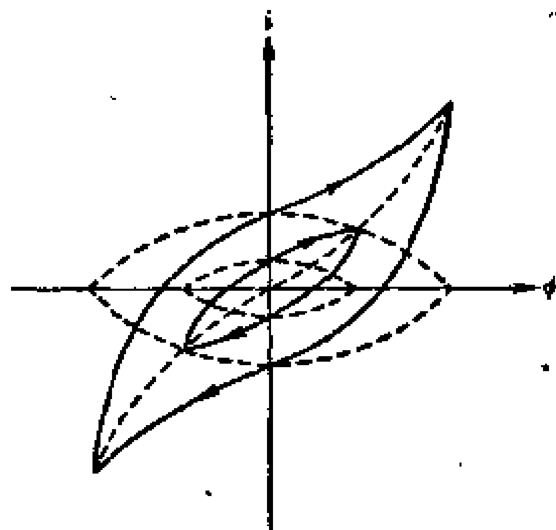


图 19.3

况,将电感的特性用下列模型表示:

$$i=a\phi+b\phi^3+h(\phi_0^2-\phi^2)\operatorname{sgn}\dot{\phi}. \tag{19.5}$$

此处 a, b, h 是正常数, $b\ll a$, $h\ll a$, 又 ϕ_0 是 ϕ 的振幅。第一項和第二項与§18中相同,第三項如图 19.2,最后全体的形状如图 19.3。将具有这特性的回路方程用

$$\dot{\phi}+R\dot{i}+C^{-1}i=E\omega\cos\omega t$$

表之,令

$$t=\sqrt{C/a}\,\tau,\quad R\sqrt{Ca}=\mu\gamma,\quad b/a=\mu\beta,$$
$$h/a=\mu\alpha,\quad EC\omega/a=\mu E,\quad \omega\sqrt{C/a}=\omega_0.$$

忽略 μ^2 的項(将 τ 改写为 t, 将 ω_0 改写为 ω),

$$\ddot{\phi}+\mu\gamma\dot{\phi}+\phi+\mu\beta\phi^3+\mu\alpha(\phi_0^2-\phi^2)\operatorname{sgn}\dot{\phi}=\mu F\cos\omega t. \tag{19.6}$$

由此

$$f_1(\rho,\theta)=-(3/4)\beta\rho^3+F\cos\theta,\quad g_1(\rho,\theta)=\gamma\rho+(8/3)\alpha\pi^{-1}\rho^2-F\sin\theta.$$

从而(19.3)是

$$\left.\begin{aligned}\rho'&=-\mu\gamma\rho-(8/3)\mu\alpha\pi^{-1}\rho^2+\mu F\sin\theta,\\ \theta'&=(\omega^2-1)-(3/4)\mu\beta\rho^2+\mu F\rho^{-1}\cos\theta.\end{aligned}\right\}$$

这共振曲綫是

$$(9/16)\beta^2\rho^6+[(64/9)\alpha^2\pi^{-2}+(3/2)\beta(1-\omega^2)]\rho^4$$
$$+(16/3)\alpha\gamma\pi^{-1}\rho^3+[\gamma^2+(1-\omega^2)^2]\rho^2-F^2=0.$$

由以上結果可知道，在这个模型中滞后的影响，即(19.5)的第三項

$$h(\phi_0^2-\phi^2)\operatorname{sgn}\dot\phi$$

和非綫性阻尼 $h|\phi|\dot\phi$ 有完全相同的影响。

§20 一般情形

以上假定 ω 是常近于 1. 此处若把这条件取消，設 $\omega=\frac{1}{m}$ (m 是整数且 $\geqslant 1$)，由 f 的形式，(4)式沒有周期为 $2\pi/\omega$ 的解(例如 $f=\sin(t/m)+\sin t$)。然而下列事实成立：$\omega\neq 1/m$ 时，(4)式对于充分小的 μ 常只有一个周期为 $2\pi/\omega$ 的解，則当

$$\int_0^{2\pi} f_{\dot x}(0,\,0,\,s)\,ds$$

为負时完全稳定，为正时完全不稳定。

于初始条件：$x(0)=A,\ \dot x(0)=B$ 的情況下，取 X 关于变数的解析函数，(4)式的解可成下面形式：

$$x(t)=A\cos t+B\sin t+\mu X(t,\,A,\,B,\,\mu).$$

这要有周期 $2\pi/\omega$ 的条件是

$$A[1-\cos(2\pi/\omega)]-B\sin(2\pi/\omega)=\mu X(2\pi/\omega,\,A,\,B,\,\mu),$$

$$A\sin(2\pi/\omega)+B[1-\cos(2\pi/\omega)]=\mu\dot X(2\pi/\omega,\,A,\,B,\,\mu).$$

由 $\omega\neq 1/m$，对于充分小的 μ 可得到唯一的解 $A=A(\mu)$，$B=B(\mu)$. 由此可知周期为 $2\pi/\omega$ 的解只有一个，它是

$$x(t)=\mu\left[\alpha\cos t+\beta\sin t+\int_0^t f(0,\,0,\,\omega s)\sin(t-s)\,ds\right]+O(\mu^2),$$

而

$$\alpha+i\beta=[2\sin(\pi/\omega)]^{-1}\int_0^{2\pi/\omega} f(0,\,0,\,\omega s)\exp i(s-\pi\omega^{-1})\,ds.$$

其次看看稳定性，計算出第3章§14中的 $a,\,b,\,c,\,d$，可求得 $D(0)$，$D(+1)$，$D(-1)$. 如設

$$G=\omega^{-1}\int_0^{2\pi} f_x(0,\,0,\,s)\,ds,\quad H=\omega^{-1}\int_0^{2\pi} f_{\dot x}(0,\,0,\,s)\,ds,$$

則

$$D(0)=1+\mu H+O(\mu^2),$$

$$D(+1)=[1-\cos(2\pi/\omega)](2+\mu H)-\mu G\sin(2\pi/\omega)+O(\mu^2),$$

$$D(-1)=[1+\cos(2\pi/\omega)](2+\mu H)+\mu G\sin(2\pi/\omega)+O(\mu^2).$$

所以对充分小的 μ, $D(+1)>0$, $D(-1)>0$, 因而相应于 H 的正或负分别有 $D(0)>1$, $D(0)<1$。

这个結果和§17得到的結果(得到几个周期解)初看好象有矛盾，其实此处得到的振幅是和 μ 同一級大小，它和§17中得到的沒有直接的关系。实际上在§17～§19中成为問題的是当 ω 接近于1的程度为 $|\omega-1|\sim\mu$ 的情况，可出現具有有限大振幅的周期解。此处的 ω 是給定的，而考虑 $\mu\ll|\omega-1|$，所以很容易想象会得到別的結果。

§21 一般的近似方法(一)

此处假定(4)式的右边 $f(x, \dot{x}, \omega t)$ 是 x, $\dot{x}$, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ 的多項式，不失一般性可取 $\omega>0$。現在对一般的 ω，同时并不特别限定于周期解，叙述求(4)式的近似解的方法。設

$$x=\rho\cos\theta,\quad \dot{x}=-\rho\sin\theta, \tag{21.1}$$

代入(4)式則 ρ, θ 必須滿足

$$\dot{\rho}=-\mu[f]\sin\theta,\quad \dot{\theta}=1-\mu\rho^{-1}[f]\cos\theta,$$
$$[f]=f(\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, \omega t). \tag{21.2}$$

又設

$$\left.\begin{aligned}[f]\sin\theta&=\sum_{m,n}A_{mn}(\rho)\exp[i(m\theta+n\omega t)],\\ [f]\cos\theta&=\sum_{m,n}B_{mn}(\rho)\exp[i(m\theta+n\omega t)],\end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

因为 f 是多項式，所以右边不是无限級数。又 A_{mn}, B_{mn} 是 ρ 的多項式。

此处，根据 ω 的不同值而分别处理共振和非共振的情况。

共振即 $m+n\omega$ 和 μ 同級大小，且对于这样的 m, n, $A_{mn}\neq0$ 或者 $B_{mn}\neq0$ 的情形，在 $A_{mn}\neq0$ 或者 $B_{mn}\neq0$ 的那些 (m, n)，ω

不在 $-(m/n)$ 的邻近，即 $\mu\ll 1\to\mu\ll|m+n\omega|$ 的情形称为非共振。

此处首先由非共振的情形开始。从

$$\left.\begin{aligned}u(\rho,\theta,\omega t)&=\sum_{m^2+n^2\neq 0}A_{mn}[i(m+n\omega)]^{-1}\exp[i(m\theta+n\omega t)],\\ v(\rho,\theta,\omega t)&=\sum_{m^2+n^2\neq 0}B_{mn}[i(m+n\omega)]^{-1}\exp[i(m\theta+n\omega t)],\end{aligned}\right\}\tag{21.4}$$

确定 u, v, 取 $A_{00}\equiv A$, $B_{00}\equiv B$,

$$\left.\begin{aligned}u_t+u_\theta&=[f]\sin\theta-A(\rho),\\ v_t+v_\theta&=[f]\cos\theta-B(\rho).\end{aligned}\right\}\tag{21.5}$$

此处作下列变换 $(\rho,\theta)\to(\rho_1,\theta_1)$:

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\rho_1-\mu u(\rho_1,\theta_1,\omega t),\\ \theta&=\theta_1-\mu\rho_1^{-1}v(\rho_1,\theta_1,\omega t),\end{aligned}\right\}\tag{21.6}$$

由(21.5)得

$$\left.\begin{aligned}\dot\rho_1&=-\mu A(\rho_1)+O(\mu^2),\\ \dot\theta_1&=1-\mu\rho_1^{-1}B(\rho_1)+O(\mu^2).\end{aligned}\right\}\tag{21.7}$$

从而(4)式的解可写为下列形式:

$$\begin{aligned}x=\rho\cos\theta&=(\rho_1-\mu u)\cos(\theta_1-\mu\rho_1^{-1}v)\\ &=\rho_1\cos\theta_1+\mu(v\sin\theta_1-u\cos\theta_1)+O(\mu^2).\end{aligned}\tag{21.8}$$

此結果为了易看,令

$$[f]=\sum_{m,n}f_{mn}(\rho)\exp[i(m\theta+n\omega t)],$$

由(21.3),

$$\begin{aligned}A_{mn}&=(2i)^{-1}(f_{m-1,n}-f_{m+1,n}),\\ B_{mn}&=(2)^{-1}(f_{m-1,n}+f_{m+1,n}).\end{aligned}$$

将其代入(21.8)进行計算

$$\begin{aligned}x=\rho_1\cos\theta_1+\mu\Big\{&4^{-1}[f_{-10}\exp(-i\theta_1)+f_{10}\exp(i\theta_1)]\\ &-\sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\frac{f_{mn}}{(m+n\omega)^2-1}\exp[i(m\theta_1+n\omega t)]\Big\}\\ &+O(\mu^2).\end{aligned}\tag{21.9}$$

此处若作为 ρ_1, θ_1 的近似，将(21.7)代以

$$\dot{\bar{\rho}} = -\mu A(\bar{\rho}), \quad \dot{\bar{\theta}} = 1 - \mu\bar{\rho}^{-1}B(\bar{\rho}), \tag{21.10}$$

而采用满足方程(21.10)的 $\bar{\rho}, \bar{\theta}$，则得下列近似解：

$$x = \bar{\rho}\cos\bar{\theta} + \mu\Big\{4^{-1}[f_{-10}(\bar{\rho})\exp(-i\bar{\theta}) + f_{10}(\bar{\rho})\exp(i\bar{\theta})]$$
$$- \sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0} \frac{f_{mn}(\bar{\rho})}{(m+n\omega)^2-1}\exp[i(m\bar{\theta}+n\omega t)]\Big\}. \tag{21.11}$$

若 $A(a)=0$，$A'(a)>0$，则由(21.10)，对于接近 a 的 $\bar{\rho}$，在 $t\to+\infty$ 时，$\bar{\rho}\to a$。从而在(21.11)，如以 a 代 $\bar{\rho}$，于是所得解在这意义下是稳定的。

那么，

$$4\pi^2\omega^{-1}A(\rho) = \int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi/\omega}[f]dt,$$

故 $A(0)=0$。同样 $m\neq 0$ 时 $f_{mn}(0)=0$。因而 $\omega\neq n^{-1}$ 时，由(21.11)

$$x = -\mu\sum\frac{f_{0n}(0)}{n^2\omega^2-1}\exp(in\omega t). \tag{21.12}$$

这是在 §20 中所求周期为 $2\pi/\omega$ 的解的近似解。实际上，如略去 μ^2 以上的项，不难得到同样的结果。同时由等式

$$A'(0) = -(4\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}(0, 0, s)ds,$$

因而 $A'(0)>0$ 是与 §20 中 $H<0$ 等同的，所以給出了正确的稳定条件。

其次，在 f 不含有 t 的情况中，对 $n\neq 0$，$f_{mn}=0$，所以按照(21.11)得

$$x = \bar{\rho}\cos\bar{\theta} + \mu\Big\{4^{-1}[f_{-10}(\bar{\rho})\exp(-i\bar{\theta}) + f_{10}(\bar{\rho})\exp(i\bar{\theta})]$$
$$- \sum_{m^2\neq 1}\frac{f_{m0}}{m^2-1}\exp(im\bar{\theta})\Big\}. \tag{21.13}$$

第2章§10得到的近似解就是这式子右边 $\mu=0$ 的結果，而确定 $\bar{\rho}$，$\bar{\theta}$ 的式子(10.5)是和(21.10)一致的。

其次討論共振情形。

今取 $\omega=sr^{-1}+\mu\sigma$ (r，s 是互质的整数)，U，V 由下列式子确定：

$$\left.\begin{aligned}U(\rho,\theta,\omega t)&=\sum_{mr+ns\neq 0}A_{mn}[i(m+n\omega)]^{-1}\exp[i(m\theta+n\omega t)],\\ V(\rho,\theta,\omega t)&=\sum_{mr+ns\neq 0}B_{mn}[i(m+n\omega)]^{-1}\exp[i(m\theta+n\omega t)].\end{aligned}\right\}\quad(21.14)$$

如果进行变换 $(\rho,\theta)\rightarrow(\rho_1,\theta_1)$：

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\rho_1-\mu U(\rho_1,\theta_1,\omega t),\\ \theta&=\theta_1-\mu\rho_1^{-1}V(\rho_1,\theta_1,\omega t),\end{aligned}\right\}\quad(21.15)$$

利用方程

$$U_t+U_\theta=[f]\sin\theta-\sum_{mr+ns=0}A_{mn}\exp[i(m\theta+n\omega t)],$$

$$V_t+V_\theta=[f]\cos\theta-\sum_{mr+ns=0}B_{mn}\exp[i(m\theta+n\omega t)],$$

而得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_1&=-\mu\sum_{mr+ns=0}A_{mn}\exp[i(m\theta_1+n\omega t)]+O(\mu^2),\\ \dot{\theta}_1&=1-\mu\rho_1^{-1}\sum_{mr+ns=0}B_{mn}\exp[i(m\theta_1+n\omega t)]+O(\mu^2),\end{aligned}\right\}\quad(21.16)$$

此处

$$\theta_1=rs^{-1}\omega t+\phi.$$

于是以 ϕ 代 θ_1 則得

$$\dot{\theta}_1=1+\mu\sigma_1+\dot{\phi},\quad \sigma_1=rs^{-1}\sigma.$$

又 $mr+ns=0$ 时，$m\theta_1+n\omega t=m\phi$。因而由(21.16)得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_1&=-\mu\sum_{mr+ns=0}A_{mn}\exp(im\phi)+O(\mu^2),\\ \dot{\phi}&=-\mu[\sigma_1+\rho_1^{-1}\sum_{mr+ns=0}B_{mn}\exp(im\phi)]+O(\mu^2),\end{aligned}\right\}\quad(21.17)$$

今把

$$f(\rho_1\cos(rs^{-1}\omega t+\phi),\quad -\rho_1\sin(rs^{-1}\omega t+\phi),\ \omega t)$$

看作为 ρ_1, ωt, ϕ 的函数,将上式写为 $\{f\}$,由(21.3),因

$$\theta_1=rs^{-1}\omega t+\phi,$$

所以得

$$\{f\}\sin(rs^{-1}\omega t+\phi)$$
$$=\sum_{m,n}A_{mn}(\rho_1)\exp(im\phi)\exp[is^{-1}(mr+ns)\omega t].$$

两边对 t 顺次由零到 $2\pi s\omega^{-1}$ 积分,则得

$$\sum_{mr+ns=0}A_{mn}(\rho_1)\exp(im\phi)$$
$$=(\omega/2\pi s)\int_0^{2\pi s\omega^{-1}}\{f\}\sin(rs^{-1}\omega t+\phi)\,dt.$$

如設 $rs^{-1}\omega t+\phi=r\tau$, 則右边与

$$F(\rho_1,\phi)\equiv(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}f(\rho_1\cos r\tau,\ -\rho_1\sin r\tau,\ s\tau-sr^{-1}\phi)\sin r\tau d\tau \tag{21.18}$$

相等。同样設

$$G(\rho_1,\phi)\equiv(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}f(\rho_1\cos r\tau,-\rho_1\sin r\tau,s\tau-sr^{-1}\phi)\cos r\tau d\tau, \tag{21.19}$$

則确定 ρ_1, ϕ 的方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot\rho_1&=-\mu F(\rho_1,\phi)+O(\mu^2),\\ \dot\phi&=-\mu[\sigma_1+\rho_1^{-1}G(\rho_1,\phi)]+O(\mu^2).\end{aligned}\right\} \tag{21.20}$$

这对应于非共振情况中的(21.7)。此处作为 ρ_1, ϕ 的近似,将(21.20)代之以滿足(21.21)的 $\bar\rho$, $\bar\phi$,

$$\dot{\bar\rho}=-\mu F(\bar\rho,\bar\phi),\quad \dot{\bar\phi}=-\mu[\sigma_1+\bar\rho^{-1}G(\bar\rho,\bar\phi)]. \tag{21.21}$$

按照非共振情况作同样計算,可得下列形式的(4)式的近似解:

$$\left.\begin{aligned}
x(t)&=\bar{\rho}\cos(rs^{-1}\omega t+\phi)+\mu(x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}),\\
x^{(1)}&=-\Sigma^{(1)}\frac{f_{mn}(\bar{\rho})}{(m+n\omega)^2-1}\exp[im\bar{\phi}+i(mp+n)\omega t],\\
x^{(2)}&=\frac{1}{4}\exp(-ip\omega t)\Sigma^{(2)}f_{mn}(\bar{\rho})\exp(im\bar{\phi}),\\
x^{(3)}&=\frac{1}{4}\exp(ip\omega t)\Sigma^{(3)}f_{mn}(\bar{\rho})\exp(im\bar{\phi}),
\end{aligned}\right\}\quad(21.22)$$

其中 $p=rs^{-1}$. $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ 分别对于所有满足 $(m\pm1)r+ns=0$, $(m+1)r+ns=0$, $(m-1)r+ns=0$ 的 (m, n)取和。

在共振情况得到的这个近似解，它的解法的特殊情况已包含在 §19 的間歇方法里 ($r=s=1$, 則(21.21) 和 (19.3)是同等的)，而且更精确些。

再有，(21.21)不同于(21.10)，它一般地不能用求积法解出。不过应用第1章的討論可以研究这解的形状。为此将极坐标 $(\bar{\rho}, \bar{\phi})$变为直角坐标(ξ, η):

$$\xi=\bar{\rho}\cos\bar{\phi},\quad \eta=\bar{\rho}\sin\phi,$$

代替(21.21)用下列形式:

$$\dot{\xi}=\mu X(\xi, \eta),\quad \dot{\eta}=\mu Y(\xi, \eta). \qquad (21.23)$$

以上所述是关于一般的近似解法，还有下列更重要的事实成立(証略)。

(1) 对应于 (21.21) 的平衡点 $(\bar{\rho}_0, \bar{\phi}_0)$，設 $\xi_0=\bar{\rho}_0\cos\bar{\phi}_0$, $\eta_0=\bar{\rho}_0\sin\bar{\phi}_0$ 是(21.23) 的稳定結点或稳定焦点，則(21.22) 可給出周期为 $2\pi s/\omega$ 的 (4) 式的完全稳定解(它的存在性可用与 §15 同样的方法弄清)的近似解。

(2) 对于(21.23)稳定周期解$(\xi_0(t), \eta_0(t))$——§14 末 $\rho_1=1$, $\rho_2<1$ 的情况——相应于 (4) 式的稳定的概周期解(具有两个基本頻率)；将 $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$ 所对应的 $\bar{\rho}_0(t)$, $\bar{\phi}_0(t)$ 代入(21.22)，卽得所給出的概周期解的近似解。

上述两项是关于共振情况的，在非共振情况中则有：

(3) 設 $A(a)=0$, $A'(a)>0$, $a\neq 0$ 則 (4) 式有稳定的概周期解(具有两个基本頻率)。在(21.11)中分别将 a, $t-t_0$ 以 $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$, 代之，即得給出的概周期解的近似解。

再有，方程

$$\ddot{x}+a^2x=\mu f(x,\dot{x},\omega t)$$

在以 $at=\tau$ 代入时变为

$$x''+x=\mu a^{-2}f(x,ax',\omega a^{-1}\tau)=\mu f_1(x,x',\omega_1\tau),$$

于是后者的 $\omega_1\approx s/r$ 相当于前者的 $\omega\approx(s/r)a$.

例 1 $\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu bx^3=\mu F\cos\omega t\quad(0<\mu\ll 1,\ c>0)$.

$[f]=c\rho\sin\theta-b\rho^3\cos^3\theta+F\cos\omega t$, 因而 $f_{10}=(c\rho/2i)-(3/8)b\rho^3$, $f_{-10}=-(c\rho/2i)-(3/8)b\rho^3$, $f_{30}=f_{-30}=-b\rho^3/8$, $f_{01}=f_{0-1}=F/2$, 其他的 $f_{mn}=0$. 又

$$A=A_{00}=c\rho/2,\quad B=B_{00}=-(3/8)b\rho^3.$$

除 (m,n) 为 $(0,0)$, $(\pm 2,0)$, $(\pm 4,0)$, $(\pm 1,\pm 1)$ 以外，所有的

$$A_{mn}=B_{mn}=0,$$

所以共振是限于 $\omega\approx 1$ 的情况。

首先在非共振的場合($|\omega-1|\gg\mu$), 由(21.10)(将 $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ 写为 ρ, θ),

$$\dot{\rho}=-(1/2)\mu c\rho,\quad \dot{\theta}=1+(3/8)\mu b\rho^2. \tag{21.24}$$

从而定常解就是强迫振动解：

$$x=\mu F(1-\omega^2)^{-1}\cos\omega t+O(\mu^2),$$

它是稳定的。

其次考虑共振的情形，即 $\omega=1+\mu\sigma$ 的情况。由(21.21)(将 $\bar{\rho}$, $\bar{\phi}$ 写为 ρ, ϕ)得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=-(\mu/2)(c\rho+F\sin\phi),\\ \dot{\phi}&=-\mu[\sigma-(3/8)b\rho^2+(F/2)\rho^{-1}\cos\phi].\end{aligned}\right\} \tag{21.25}$$

所以平衡点满足

$$\rho^2\{c^2+4[\sigma-(3/8)b\rho^2]^2\}=F,$$

共有一个或者三个。其稳定性由下式判定：

$$p=\mu c>0,\ q=\mu^2[\sigma^2+c^2/4-(9/64)b^2\rho^4],\ p^2-4q=\mu^2[(9/16)b^2\rho^4-4\sigma^2].$$

又 (21.25) 沒有周期解(用直角坐标(21.23)写出后，$X_\xi+Y_\eta=-C<0$,

按 Bendexson 的判别法❶)。从而在共振情形中,定常解只有周期为 $2\pi/\omega$ 的兩期解,其稳定性用上述方法研究,和§17 例1得到相同的結果。

例2 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=\mu F\cos\omega t \quad (0<\mu\ll1)$.

按

$$[f]=-(1-\rho^2\cos^2\theta)\rho\sin\theta+F\cos\omega t,$$

故

$$f_{01}=f_{0-1}=F/2,\quad f_{10}=-f_{-10}=(i/2)(\rho-\rho^3/4),$$
$$f_{30}=-f_{-30}=(1/8i)\rho^3,$$

其他的 $f_{mn}=0$.

$$A=A_{00}=-(1/2)(\rho-\rho^3/4),\quad B=B_{00}=0.$$

除 (m,n) 为 $(0,0)$, $(\pm2,0)$, $(\pm4,0)$, $(\pm1,\pm1)$ 外,所有的

$$A_{mn}=B_{mn}=0.$$

所以共振情况限于 $\omega\approx1$.

首先,在非共振情况,由(21.10)(将 $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ 写为 ρ, θ),

$$\dot{\rho}=(\mu/2)\rho(1-\rho^2/4),\quad \dot{\theta}=1, \tag{21.26}$$

从而对应于 $\rho=0$ 的定常解

$$x=\mu F(1-\omega^2)^{-1}\cos\omega t+O(\mu^2)$$

是不稳定的解,又对应于 $\rho=2$ 的解

$$x=2\cos(t-t_0)-\mu[(1/4)\sin3(t-t_0)+F(\omega^2-1)^{-1}\cos\omega t]+O(\mu^2)$$

是稳定的解。

其次共振情况,即 $\omega=1+\mu\sigma$ 的情况,由(21.21)(将 $\bar{\rho}$, $\bar{\phi}$ 写为 ρ, ϕ),

$$\dot{\rho}=(\mu/8)(4\rho-\rho^3-4F\sin\phi),\quad \dot{\phi}=-\mu[\sigma+(F/2)\rho^{-1}\cos\phi]. \tag{21.27}$$

容易計算出这平衡点是一个或者三个;在图17.3(把 ω_1 代以 σ)中,在区域I内是一个不稳定点;区域II内一个稳定点,两个不稳定点;区域III内两个稳定点,一个不稳定点;区域IV内则有一个稳定的平衡点。

既然在区域I内只有一个不稳定的平衡点,于是就产生了在这种情况中原方程有沒有定常的解,以及如果有的話,其解的形状是怎样等的問題。

今将 ρ, ϕ 設为极坐标,对于属于区域I的 F, σ (21.27),只有一个閉軌道存在,它表示为稳定的。实际上由(21.27)的第一式,$\rho>\bar{\rho}(F)$(例如 $\bar{\rho}(F)=(1/3)(4+\sqrt{6F+4})$)时,$\dot{\rho}<0$. 即(21.27)的解向內側横割半徑为

❶ 見第1章,§4,(2)。——校者注

$\bar{\rho}(F)$ 的圆周．而在这种情况，由于不稳定的平衡点是結点或者是焦点，所以(21.27)的解将向外侧横切一个环繞平衡点的小圆周；因而依照第1章§4，性质(a)，(21.27)具有稳定的閉軌道。唯一性的証明省略。最后属于区域I对于 F, σ 原方程一般具有稳定的概周期解：

$$x=\rho_0(t)\cos[\omega t+\phi_0(t)]+O(\mu)\,. \tag{21.28}$$

此处将 σ 固定，設 F 甚小，则(21.27)的周期解 $\rho=\rho_0(t)$，$\phi=\phi_0(t)$ 的軌道近于一个圆，圆的中心为原点，半徑为 2．ρ_0，ϕ_0 的周期大致为 $2\pi(\mu\sigma)^{-1}$。

例 3 $\ddot{x}+\mu c\dot{x}+(1-2\mu q\cos 2\omega t)x+\mu bx^3=0 \quad (0<\mu\ll 1,\ c>0)$.

$$f(x,\dot{x},\omega t)=-c\dot{x}-bx^3+2qx\cos 2\omega t,$$

$$[f]=c\rho\sin\theta-b\rho^3\cos^3\theta+2q\rho\cos\theta\cos 2\omega t,$$

$$f_{10}=(2i)^{-1}c\rho-(3/8)b\rho^3,$$

$$f_{-10}=-(2i)^{-1}c\rho-(3/8)b\rho^3,$$

$$f_{30}=f_{-30}=-b\rho^3/8,$$

$$f_{12}=f_{1-2}=f_{-12}=f_{-1-2}=q\rho/2,$$

此外的 $f_{mn}=0$。

$$A=A_{00}=c\rho/2,\quad B=B_{00}=-(3/8)b\rho^3.$$

除 (m,n) 为 $(0,0)$，$(\pm2,0)$，$(\pm4,0)$，$(0,\pm2)$，$(\pm2,\pm2)$ 外，$A_{mn}=B_{mn}=0$．所以共振是限于 $\omega\approx1$ 的情形。

首先，在非共振情形，由(21.10)(将 $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ 写为 ρ, θ)，

$$\dot{\rho}=-(\mu/2)c\rho,\quad \dot{\theta}=1+(3\mu/8)b\rho^2. \tag{21.29}$$

从而定常解是 $x=0$，且为稳定的。

其次，在共振情形，即 $\omega=1+\mu\sigma$ 的情形，由(21.21)(将 $\bar{\rho}$, $\bar{\phi}$ 写为 ρ, ϕ)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=-(\mu/2)\rho(c+q\sin 2\phi),\\ \dot{\phi}&=-(\mu/2)[2\sigma-(3/4)b\rho^2+q\cos 2\phi].\end{aligned}\right\} \tag{21.30}$$

(21.30)由于在 $\phi\to\phi+\pi$ 不变，所以軌道的形状关于原点对称。对于(21.30)的平衡点状况的研究可得下列結果：

1) $c^2>q^2$.

平衡点为 $\rho=0$，且为稳定的。

2) $4\sigma^2+c^2>q^2>c^2$, $\quad b\sigma<0$.

和 1) 一样，平衡点为 $\rho=0$，且为稳定的。

3) $4\sigma^2+c^2>q^2>c^2$, $\quad b\sigma>0$.

平衡点除 $\rho=0$ (稳定)外，还有四个，即

$$\rho_1^2=\frac{4}{3b}(2\sigma+\sqrt{q^2-c^2}),\quad \rho_2^2=\frac{4}{3b}(2\sigma-\sqrt{q^2-c^2}),$$

$$q\cos 2\phi_i=\frac{3}{4}b\rho_i^2-2\sigma\quad (i=1,2).$$

在四个平衡点 (ρ_1,ϕ_1)，$(\rho_1,\phi_1+\pi)$，(ρ_2,ϕ_2)，$(\rho_2,\phi_2+\pi)$ 中，当 $b>0$ 时，ρ_1 对应的两个为稳定，ρ_2 对应的两个为不稳定；当 $b<0$ 时则相反，ρ_2 对应的两个为稳定，ρ_1 对应的两个为不稳定。

4) $q^2>4\sigma^2+c^2$.

除 $\rho=0$ (不稳定) 外，还有两个稳定平衡点，即当 $b>0$ 时，$\rho_3^2=\frac{4}{3b}(\sqrt{q^2-c^2}+2\sigma)$，当 $b<0$ 时，$\rho_3^2=\frac{4}{3b}(-\sqrt{q^2-c^2}+2\sigma)$，$q\cos 2\phi_3=\frac{3}{4}b\rho_3^2-2\sigma$. 取 (ρ_3,ϕ_3)，$(\rho_3,\phi_3+\pi)$ 为稳定的平衡点。

以上2)，3)，4)在 $b>0$ 时如图 21.1 所示。

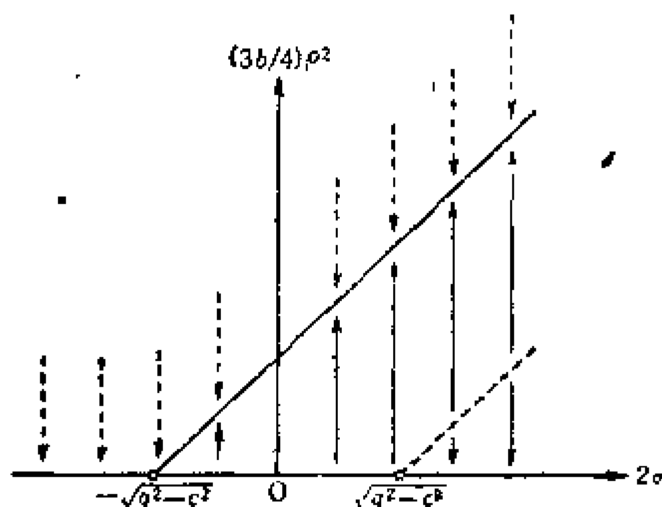


图　21.1

由以上可知 (21.30) 的平衡点的样子。由于 $X_\xi+Y_\eta=-c<0$，和例1一样，可知閉軌道不存在。

从而在共振情况中，定常的稳定解在1)，2)中只有 $x=0$，在3) 中如 $b>0$，则有三个，

$$x=0,$$

和

$$x=\rho_1\cos(\omega t+\phi_1)+O(\mu),$$

$$x=\rho_1\cos(\omega t+\phi_1+\pi)+O(\mu);$$

如 $b<0$，定常解有三个，$x=0$ 以及上面将 ρ_1，ϕ_1 代换以 ρ_2，ϕ_2. 在4) 中定常解有两个

$$x=\rho_3\cos(\omega t+\phi_3)+O(\mu),\quad x=\rho_3\cos(\omega t+\phi_3+\pi)+O(\mu).$$

§22　一般的近似解法(二)

到現在为止，处理的一直是(4)式的形式，現在簡单地研究(4)式归結为下列方程的情形：

$$\ddot{x}+x=\mu f(x, \dot{x})+F\cos\omega t \quad (0<\mu\ll 1). \tag{22.1}$$

此处假定 $f(x, \dot{x})$ 是关于 x 和 $\dot{x}$ 的多项式，又取 $\omega\neq 1$。

当 $\mu=0$ 时，取 $\alpha=(1-\omega^2)^{-1}F$，且有解

$$x=\alpha\cos\omega t.$$

今設 $x=\alpha\cos\omega t+\xi$，則(22.1)成为

$$\ddot{\xi}+\xi=\mu f(\alpha\cos\omega t+\xi,\ -\omega\alpha\sin\omega t+\dot{\xi}). \tag{22.2}$$

这时 § 21 的方法也是适用的。

設 $f(x, \dot{x})$ 关于 x, $\dot{x}$ 的最高次数为 k，于是 (22.2) 中共振的可能性仅限于

$$\omega\approx sr^{-1} \quad (r\leqslant k,\ s\leqslant k)$$

的情形。其理由是，在 § 21 中的 f_{mn} 在

$$|m|+|n|>k$$

时为零，从而对于滿足

$$|m|+|n|>k+1$$

的 m, n，有 $A_{mn}=B_{mn}=0$。

特别在

$$f(x, \dot{x})\equiv -c\dot{x}+P(x) \quad (c>0,\ P(x)\text{ 是 }k\text{ 次多项式})$$

的情形，由于 $$A=A_{00}=c\rho/2,$$

非共振时的定常解只有对应 $\rho=0$ 的周期解，且它是稳定的。又其形状是

$$x=\alpha\cos\omega t+\mu z_1+O(\mu^2),$$

其中 z_1 是

$$\ddot{z}+z=c\omega\alpha\sin\omega t-P(\alpha\cos\omega t)$$

的周期为 $2\pi/\omega$ 的解(这是唯一的)。

例 1 $\ddot{x}+x+\mu c\dot{x}+\mu bx^3=F\cos\omega t \quad (0<\mu\ll 1,\ c>0)$.

首先計算方程(22.2)的 f_{mn}。这值省略未写出，除 (m, n) 为 $(\pm 1, 0)$,

$(\pm3, 0)$，$(0, \pm1)$，$(0, \pm3)$，$(\pm1, \pm2)$，$(\pm2, \pm1)$ 以外，$f_{mn}=0$. 所以，对于在 $(0, 0)$，$(\pm2, 0)$，$(\pm4, 0)$，$(\pm1, \pm1)$，$(\pm3, \pm1)$，$(\pm2, \pm2)$，$(\pm1, \pm3)$ 以外的 (m, n)，

$$A_{mn}=B_{mn}=0.$$

从而有共振发生只限于 $\omega\approx1, 3, 1/3$ 的場合。

在非共振的情形，定常解只有以 $2\pi/\omega$ 为周期的解，且为稳定的。

其次，共振情形，考虑 $\omega=3+\mu\sigma$. 在(21.21)，取 $\sigma=3\sigma_1$，則方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot\rho&=-(\mu/8)\rho(4c-3\alpha b\rho\sin3\phi),\\ \dot\phi&=-(\mu/8)[8\sigma_1-3b(\rho^2+2\alpha^2+\alpha\rho\cos3\phi)].\end{aligned}\right\}\tag{22.3}$$

在下列条件下：

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{7}c<2b\sigma_1,\\ &(8/21)b^{-2}[2b\sigma_1-(4b^2\sigma_1^2-7c^2)^{1/2}]<\alpha^2\\ &\qquad<(8/21)b^{-2}[2b\sigma_1+(4b^2\sigma_1^2-7c^2)^{1/2}],\end{aligned}\right\}\tag{22.4}$$

(22.3)有六个平衡点 $(\rho\neq0)$，取

$$\rho_i^2=(6b^2)^{-1}[16b\sigma_1-9\alpha^2b^2\pm b(-63\alpha^4b^2+96\alpha^2b\sigma_1-64c^2)^{1/2}]$$
$$(i=1, 2)\tag{22.5}$$

給出 (ρ_1, ϕ_1)，$(\rho_1, \phi_1+2\pi/3)$，$(\rho_1, \phi_1+4\pi/3)$，(ρ_2, ϕ_2)，$(\rho_2, \phi_2+2\pi/3)$，$(\rho_2, \phi_2+4\pi/3)$，其中 ϕ_1, ϕ_2 是将 (22.3) 的右边取作零后对 ρ_1, ρ_2 所分别对应的 ϕ. 此处設 $\rho_1>\rho_2$，对应于 ρ_2 的三个平衡点是稳定的，对应于 ρ_1 的三个鞍点是不稳定的。

其次，条件(22.4)不成立时，$\rho=0$ 是(22.3)的稳定平衡点(变为直角坐标)，而且(22.3)不具有周期解(变为直角坐标后 $X_\xi+Y_\eta=-c<0$)．因而一般地在(22.4)不成立时，当 $t\to+\infty$，有 $\rho\to0$.

結果为 $\omega=3+\mu\sigma$ 时，原方程有定常的稳定解如下：当(22.4)成立时，方程有最短周期为 $6\pi/\omega$ 的三个完全稳定解(这三个解只是彼此相差一个相位 $2\pi/\omega$)：

$$x=\rho_2\cos(\omega t/3+\phi)+\alpha\cos\omega t+O(\mu)$$

(其中 ϕ 是 ϕ_2 或 $\phi_2+2\pi/3$，或 $\phi_2+4\pi/3$)；还有周期为 $2\pi/\omega$ 的完全稳定解：

$$x=\alpha\cos\omega t+O(\mu).$$

在(21.4)不成立时，一般地只有周期为 $2\pi/\omega$ 的完全稳定解：

$$x=\alpha\cos\omega t+O(\mu).$$

其次考虑另外一个共振情况，即 $\omega=1/3+\mu\sigma$ 的情形。詳細計算省略不写。(21.21)所对应的方程一般有一个或三个平衡点，沒有周期解。对于这平衡点 (ρ_0, ϕ_0) 相应的方程(22.2)有周期为 $2\pi/3\omega$ 的解：

$$\xi=\rho_0\cos(3\omega t+\phi_0)+O(\mu).$$

从而当 $\omega=1/3+\mu\sigma$ 时，原方程有形为

$$x=a\cos\omega t+\rho_0\cos(3\omega t+\phi_0)+O(\mu)$$

的定常解。

例 2 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=F\cos\omega t\quad(0<\mu\ll 1)$.

(22.2)中的 f_{mn} 除 (m, n) 为 $(\pm1, 0)$, $(\pm3, 0)$, $(0, \pm1)$, $(0, \pm3)$, $(\pm2, \pm1)$, $(\pm1, \pm2)$ 外均为零。又 $A=A_{00}=(-4\rho-2a^2\rho+\rho^3)/8$, $B=B_{00}=0$ 时，除 (m, n) 为 $(0, 0)$, $(\pm2, 0)$, $(\pm4, 0)$, $(\pm1, 0)$, $(\pm3, \pm1)$, $(0, \pm2)$, $(\pm2, \pm2)$, $(\pm1, \pm1)$, $(\pm1, \pm3)$ 外 $A_{mn}=B_{mn}=0$。所以得到发生共振是在 $\omega\approx1$, 3, 1/3 的情况。在非共振的情形中，由(21.10)得

$$\dot{\rho}=(\mu/8)\rho(4-2a^2-\rho^2),\quad \dot{\theta}=1.$$

当 $a^2>2$ 时，$\rho=0$ 相应的解是稳定的 $(A'(0)>0)$；$a^2<2$ 时，$\rho=0$ 相应的解是不稳定的，$\rho=\sqrt{4-2a^2}$ 相应的解是稳定的。結果为：当 $a^2<2$ 时，定常的稳定解为 $x=a\cos\omega t+\sqrt{4-2a^2}\cos(t-t_0)+O(\mu)$；$a^2>2$ 时为 $x=a\cos\omega t+O(\mu)$.

其次，在共振情形：考虑 $\omega=3(1+\mu\sigma_1)$. (21.21)是

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}&=(\mu/8)\rho[(4-2a^2)-\rho^2-a\rho\cos3\phi],\\ \dot{\phi}&=(\mu/8)(a\rho\sin3\phi-8\sigma_1).\end{aligned}\right\}\tag{22.6}$$

当 $D\equiv-7a^4+16a^2-16^2\sigma_1^2>0$ 时，具有 $\rho\neq0$ 的平衡点，在 $D<0$ 时，除了 $\rho=0$ 以外，沒有平衡点。

当 $D>0$ 时，平衡点有三个稳定的結点 (ρ_2, ϕ_2), $(\rho_2, \phi_2+2\pi/3)$, $(\rho_2, \phi_2+4\pi/3)$ 和三个鞍点 (ρ_1, ϕ_1), $(\rho_1, \phi_1+2\pi/3)$, $(\rho_1, \phi_1+4\pi/3)$. 其中 $\rho_1=4-(3/2)a^2-\sqrt{D}/2$, $\rho_2=4-(3/2)a^2+\sqrt{D}/2$, ϕ_i 对应于 ρ_i.

和 D 的正負号无关，原点总是(22.6)的平衡点（直角坐标形式）；$a^2>2$ 时是稳定的焦点，$a^2<2$ 时是不稳定的焦点。在 $a^2\geq2$ 时，(22.6)的周期解不存在，在 $a^2<2$, $D<0$ 时则有一个周期解，且是稳定的。当 a 甚小时，在非共振情况中，可以猜測这个周期解表現为一个閉軌道，接近于一个以原点为中心，2 为半徑的圓。可以同样地討論其余的情形 $\omega\approx1/3$，此处从略。

§23 关于拟調和振动

$$\ddot{x}+x=\mu f(x, \dot{x}, \omega t) \quad (0<\mu\ll 1) \tag{23.1}$$

前述定常振动一般称为**拟調和**(pseudo-harmonic)**振动**，函数 f 是关于 ωt 的周期为 2π 的周期函数(也包含沒有这項的情况)，且在許多情况中能表示为 x, $\dot{x}$, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ 的多項式(当然也有不是这种的情况，如§10的例2, 例3, 例4以及§19的例等)。从实用的观点看来，在这种振动中其振幅为一級且是稳定的才成为主要問題。

在电系統和机械系統中，这种拟調和振动是极为重要的。研究(23.1)可以說明很多問題，以下举出某些典型例子。

先将(23.1)右边函数 f 所含有的項，关于 ωt 进行如下的分类。函数 f 含有的項可分为：1)不含有关于 ωt 的項(例：$\dot{x}$, x^2, $x|\dot{x}|$)；2)仅由关于 ωt 的項构成(例：$\cos\omega t$, $\operatorname{sgn}\sin 2\omega t$)；3)由 x, $\dot{x}$ 构成的項与給定关于 ωt 的項的乘积(例：$x\cos 2\omega t$, $x^2\dot{x}\operatorname{sgn}\sin 4\omega t$)三种类型。

在(23.1)中，函数 f 由1)的类型的項构成时，所发生定常振动称为(拟調和)**自激振动**。

例 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=0$。

例 $\ddot{x}+\mu(-1+\rho^2)\dot{x}+x=0$ (ρ 是 x 的振幅)。

其次，f 含有1)的类型和2)的类型的項时，所发生的定常振动称为**强迫振动**。

例 $\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu hx^3=\mu F\cos\omega t \quad (c>0, \omega\approx 1)$。 (23.2)

如果在这种場合中去掉强迫項(类型2)的項，如 $\mu F\cos\omega t$)后的系統($F=0$)，不是成为衰減振动，而是象下面例子那样表示为自激振动，这种情况发生的定常振动称为**强迫自激振动**。

例 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=\mu F\cos\omega t \quad (\omega\approx 1)$。 (23.3)

其次，f 含有 1) 类型的项和 3) 类型的项时，发生的定常振动称为**参量(数)激励**(parametric excitation)。

例 $\ddot{x}+\mu c\dot{x}+(1+2\mu q\cos\omega t)x+\mu bx^3=0 \quad (c>0,\ \omega\approx 2)$. (23.4)

如在这种情况中，去掉参量激励的项(类型 3)的项如 $2\mu q\cos\omega t\cdot x$) 后的系統($q=0$)，不是衰减振动，而是象下列例子那样表示为自激振动，这称为**参量数励自激振动**。

例 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+[1+\mu(a-cx^2)\cos\omega t]x=0 \quad (\omega\approx 2,\ 4)$. (23.5)

还有由强迫振动，参量激励和自激振动組合的情况。

再者，同样可以容易归結到(23.1)关于下列方程:

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\ \dot{x})+F\cos\omega t \quad (0<\mu\ll 1,\ \omega\neq 1) \tag{23.6}$$

的定常运动。

例 $\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu bx^3=F\cos\omega t \quad (c>0,\ \omega\approx 3,\ 1/3)$ (23.7)

的場合称为强迫振动。

例 $\ddot{x}+\mu(-1+x^2)\dot{x}+x=F\cos\omega t \quad (\omega\approx 3,\ 1/3)$ (23.8)

的場合叫强迫自激振动。

自激振动的例子已在第 1 章 §4 叙述，所以此处省略。因 $\mu\ll 1$，所以波形一般近似于正弦波。

取强迫振动的例子。考虑在含有非綫性项(变量 x 和恢复力 $f(x)$ 不成比例的项) 的系統加上正弦外力 ($P\sin\tilde{\omega}t$) 的場合的振动：即

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+f(x)=P\sin\tilde{\omega}t \quad (\gamma>0). \tag{23.9}$$

在 f 表示为三次式

$$f(x)=\alpha x+\beta x^3 \quad (\alpha>0)$$

的場合，設

$$t=\sqrt{m/\alpha}\,\tau,\quad \gamma/\sqrt{m\alpha}=\mu c,\quad \beta/\alpha=\mu b,$$

$$Pm/\alpha=\mu F,\quad \tilde{\omega}\sqrt{m/\alpha}=\omega,$$

(将 τ 改写为 t) 则可回到(23.2)。今如取 $\beta>0$，将外力振动频率

(从而(23.9)的$\tilde{\omega}$或(23.2)的ω)依次增大,在共振点($\omega_0=\sqrt{\alpha/m}$)邻近某一个ω_2处($\omega_2>\omega_0$)振动振幅飞跃减少(图23.1)。从这种状态将振动频率减少，在频率到达共振点附近某一个ω_1($\omega_0<\omega_1<\omega_2$)时，振幅值飞跃增大。这种振动的振幅有飞跃变化的现象称为**跳跃现象**(jump phenomenon)(和第1章§5中的跳跃完全不同，这里x的变化当然为連續的)。在振动頻率增加和减少的方向，发生跳跃的頻率值是不同的($\omega_1<\omega_2$)，它說明了一种现象,称为**振动滞后**(oscillation hysteresis)。

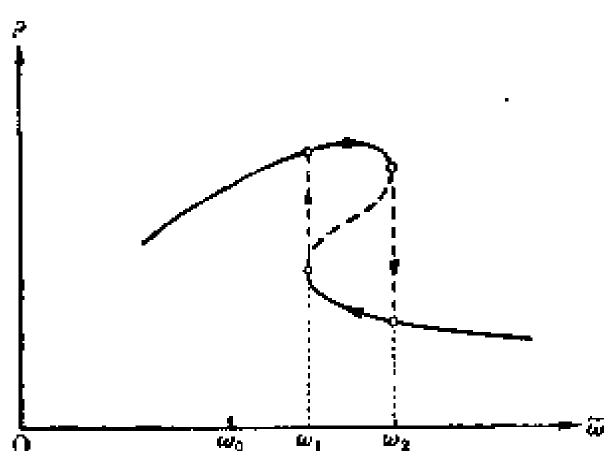


图　23.1

前面已述过的**鉄諧振回路**(图18.1)就是强迫振动的另一例子,鉄芯特性(电流对磁通量)表示为三次方程:

$$i=\alpha\phi+\beta\phi^3 \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

設$t=\sqrt{C/\alpha}\,\tau$, $\sqrt{\alpha C}\,R=\mu c$, $\beta/\alpha=\mu b$, $E\omega C/\alpha=\mu F$, $\omega\sqrt{C/\alpha}=\tilde{\omega}$，略去$\mu^2$級的項(将$\tau$改写为$t$, $\tilde{\omega}$改写为ω)，则回到(23.2)。这种情形里的$b>0$。此处电源电压(振幅)E(或(23.2)的F)依次增大,则在回路电阻R(或即(23.2)中的c)不太大的場合中，就在某一值$E=E_2$，电流(振幅)I飞跃地增大(图23.2)。由这种状态如将电压下降到某值$E=E_1$($E_1<E_2$)，I飞跃地減少，也出現振

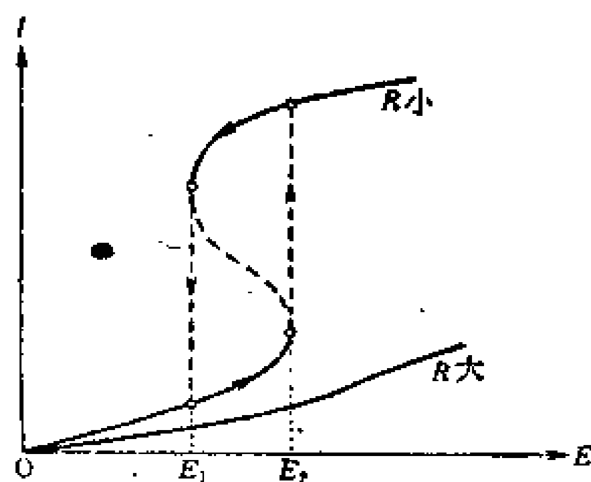


图　23.2

动滞后。当回路的电阻比某个值大时，则看不到跳跃现象。

一般地，假如稳定状态有两个，由外部来的适当信号，可使一个状态变到另一状态的系統称为**触发器**(flip-flop)。假如这两个状态分别对应0和1，这就能用于二进位的計算机。在鉄諧振回路两个稳定振动状态(电流振幅大的状态和小的状态)就可用于触发器❶。

此处电源电压大的話，令 $E\omega C/\alpha=F$，则就成为 (23.7) 型，这种情况根据适当条件(在 §22 相应的 (22.4)) 存有最短周期为 $6\pi/\omega$ 的三个稳定的定常振动。即这振动的最短周期是外力的周期的三倍。一般說来，具有外力周期 n 倍 (n 是比 1 大的整数) 为最短周期的振动，称为第 n 次**分諧波**(**次諧波**)。有这种分諧波发生的現象，称为**分諧波共振**(或**分頻現象**)。注意如 §22 那样，在 (23.6) 的 f 把 x, $\dot{x}$ 的最高次数設为 k，则除了第 k 次分諧波外，就不可能发生其他分諧波。

国会議事堂的电鈴就是利用鉄共振第三次分諧波(每秒 $16\frac{2}{3}$ 次)的振蕩。

其次是强迫振动的例子。設在阳极同步振蕩器(第1章，§6，例3)的栅极回路里插入正弦波振蕩器(图 23.3)。

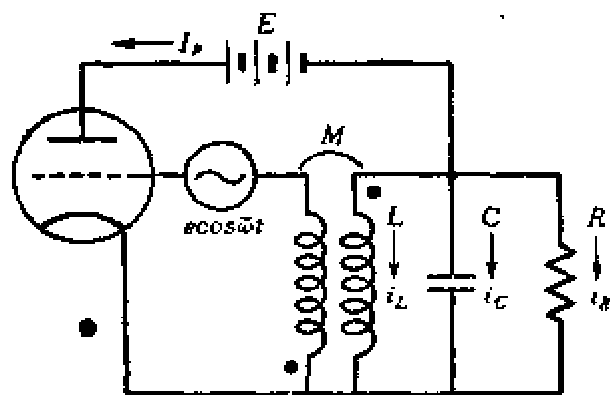


图 23.3

由 Kh 法则 (略去相栅流)，

$$I_p=-i_L-i_C-i_R,$$

$$L\dot{i}_L=Ri_R=C^{-1}\int i_C\,dt,$$

$$E_p=E+L\dot{i}_L,\quad E_g=-M\dot{i}_L+e\cos\tilde{\omega}t.$$

电子管的特性以

$$I_p=f(E_g+DE_p)$$

❶ 用作为电子数字計算机中的鉄电存儲器。——校者注

表示。此处設

$$y=e\cos\tilde{\omega}t-(M-DL)RL^{-1}i_R,$$

則

$$LC\ddot{y}+\varphi(y)\dot{y}+y=V\cos(\tilde{\omega}t+\theta), \qquad (23.10)$$

其中 $\varphi(y)=LR^{-1}-(M-DL)f'(y+DE)$,

$$V=\cos(\tilde{\omega}t+\theta)=e[(1-LC\tilde{\omega}^2)\cos\tilde{\omega}t-\tilde{\omega}LR^{-1}\sin\tilde{\omega}t].$$

今将电子管的特性用三次式

$$f(y)=f(DE)+\alpha'(y-DE)-\beta'(y-DE)^3 \quad (\alpha'>0,\ \beta'>0)$$

表示(参照图 6.7), $\varphi(y)=-\alpha+\beta y^2$, 其中

$$\alpha=\alpha'(M-DL)-LR^{-1}, \quad \beta=3\beta'(M-DL),$$

且滿足§6例3中振蕩条件 $LR^{-1}<(M-DL)\alpha'$. 因此 $\alpha>0$, $\beta>0$, 从而(23.10)是

$$LC\ddot{y}+(-\alpha+\beta y^2)\dot{y}+y=V\cos(\tilde{\omega}t+\theta). \qquad (23.11)$$

此处更設

$$t+\theta/\tilde{\omega}=\sqrt{LC}\,\tau, \quad \tilde{\omega}\sqrt{LC}=\omega, \quad y=\sqrt{\beta/\alpha}\,x,$$

$$\alpha/\sqrt{LC}=\mu, \quad \sqrt{\beta/\alpha}\,V=\mu F,$$

則(将 τ 改写为 t) (23.11)就可化成为(23.3)。

如果在这回路中插入正弦波振蕩器,并将角頻率 $\tilde{\omega}$ 保持于共振点 ($\tilde{\omega}=1/\sqrt{LC}$)附近的一定值,考慮电压(振幅)$e$(从而(23.3)的 F) 依次增大的情况, F 小时, 在§17图17.3的I的区域, 象§21例2說明的那样,可看作概周期振动。由于这振幅($\rho_0(t)$)和位相角($\phi_0(t)$)的周期大致是

$$2\pi(\mu\sigma)^{-1}\approx\pi/(\omega-1),$$

所以考慮阳极同步振蕩器振蕩頻率和插入的正弦波振蕩器的頻率数的差拍(蜂音), 此处假定电压 e 依次增大, $\tilde{\omega}$ 和 $1/\sqrt{LC}$ 的差就产生各种情况, 最后由区域I进入区域IV, 卽电压 e 在某值以上,概周期振蕩变成具有 $2\pi/\tilde{\omega}$ 周期的周期振蕩而差拍消除。这样

阳极同步振荡器自身的振荡(角)周波数 $(1/\sqrt{LC})$ 和插入的正弦波振荡器的角周波数($\tilde{\omega}$)尽管不同,但只存在周期 $2\pi/\tilde{\omega}$ 的周期振荡,不产生差拍(蜂音)的現象,我們称它为**同步現象**(synchronization)❶。又插入的正弦波振荡器是将阳极同步振荡器**引进**(pull in, ziehen),或者正弦波振荡器是将阳极同步振荡器**抑制**(suppress, mitnehmen)。

此处电压 e 若很大,并于(23.8)的型 $\sqrt{\beta/\alpha}V=F$. 这种情形中,在适当的条件,$\tilde{\omega}$ 接近于 $3/\sqrt{LC}$ 的情况产生稳定的第三次分諧波(周期为 $6\pi/\tilde{\omega}$)。这种有同步分諧波的称为**分諧同步**(subharmonic synchronization)。

同步現象是于防止振荡器的振荡频率的变动,例如若用石英振荡器(频率变动非常少)作为插入的正弦波振荡器,具有与此相近振荡频率的阳极同步振荡器与石英振荡器的频率将准确地一致化。这种情形中石英振荡器的频率是阳极同步振荡器频率的近似(适当的)整数倍。从另一观点看来,这种現象可作为是石英振荡器的频率的**分割**(或**递减**)。

其次为参数振动的例子。設有绳长为 l, 质量为 m 的摆錘:

$$ml\ddot{\theta}+\gamma l\dot{\theta}+mg\sin\theta=0,$$

考虑随绳长作周期变化的情况。令

$$l=l_0(1+a\cos\tilde{\omega}t)^{-1},$$

則

$$\ddot{\theta}+(\gamma/m)\dot{\theta}+(g/l_0)(1+a\cos\tilde{\omega}t)\sin\theta=0, \qquad (23.12)$$

此处

$$t=\sqrt{l_0/g}\,\tau, \quad (\gamma/m)\sqrt{l_0/g}=\mu c, \quad a=2\mu q,$$
$$\tilde{\omega}\sqrt{l_0/g}=\omega, \quad \sin\theta=\theta-\theta^3/6+\cdots\doteqdot\theta-\mu b\theta^3,$$

略去 μ^2 級的項(将 τ 改写为 t),則可回到(23.4)。在这情形中 $b<0$. 改变绳长,由摆的支点到錘的距离也有变动。人在蕩秋千

❶ 也称俘获或占据現象。——校者注

时，如果蹲下站起的周期約为秋千周期的一半 ($\omega\approx2$)，支点到重心的距离也以这周期变化，秋千就开始振动起来(图 23.4)。

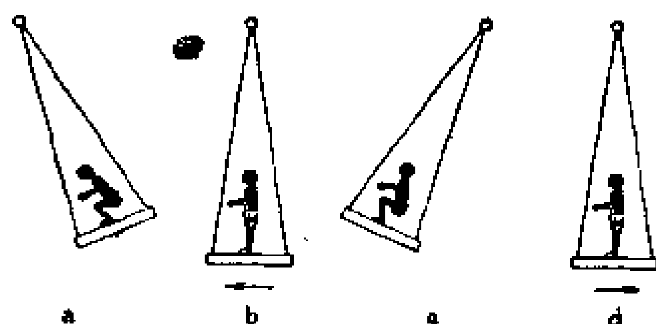


图 23.4

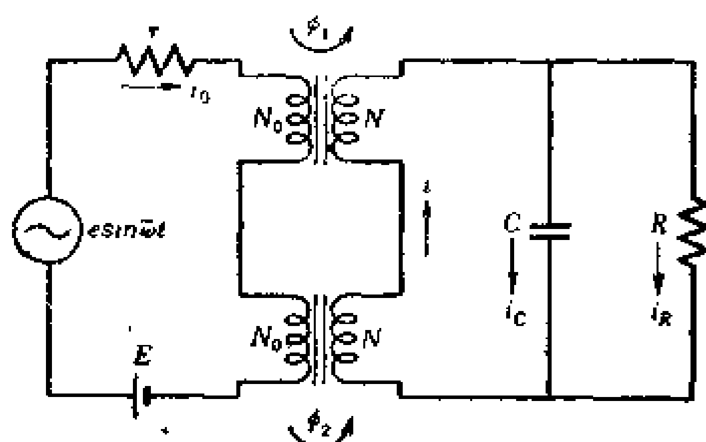


图 23.5

考虑另一例，取图 23.5 的回路，两个变压器具有相同特性，其各自的原線图匝数 N_0，副綫圈匝数 N；上侧变压器的磁通量为 ϕ_1，下侧变压器的磁通量为 ϕ_2。由 Kh 法则

$$N\dot{\phi}_1+N\dot{\phi}_2=-C^{-1}\int i_C dt=-Ri_R,\quad i=i_C+i_R,$$

$$N_0\dot{\phi}_1-N_0\dot{\phi}_2+ri_0=E+e\sin\tilde{\omega}t,\quad Ni+N_0i_0=f(\phi_1),$$

$$Ni-N_0i_0=f(\phi_2).$$

此处 $$\phi_1+\phi_2=x,\quad \phi_1-\phi_2=y.$$

設

$$\left.\begin{aligned}&2CN^2\ddot{x}+(2N^2/R)\dot{x}+[f(\phi_1)+f(\phi_2)]=0,\\&2N_0^2\dot{y}+r[f(\phi_1)-f(\phi_2)]=2N_0(E+e\sin\tilde{\omega}t).\end{aligned}\right\}$$

令

$$f(\phi)=\alpha\phi+\beta\phi^3 \quad (\alpha>0,\ \beta>0),$$

则

$$\left.\begin{aligned}&2CN^2\ddot{x}+(2N^2/R)\dot{x}+[\alpha+(\beta/4)(x^2+3y^2)]x=0,\\&2N_0^2\dot{y}+r[\alpha+(\beta/4)(3x^2+y^2)]y=2N_0(E+e\sin\tilde{\omega}t).\end{aligned}\right\} \quad (23.13)$$

此处取 $\beta\ll\alpha$，略去第二式中含有 β 的项，则

$$2N_0^2\dot{y}+r\alpha y=2N_0(E+e\sin\tilde{\omega}t).$$

定常解是

$$y=V+v\cos(\tilde{\omega}t+\theta),$$

其中

$$V=2N_0E/(r\alpha),\quad v=2N_0e/\sqrt{4N_0^4\tilde{\omega}^2+r^2\alpha^2}.$$

将它代入第一式，则

$$\begin{aligned}2CN^2\ddot{x}&+(2N^2/R)\dot{x}+[\alpha+(3\beta/8)(2V^2+v^2)]x+(\beta/4)x^3\\&+(3\beta v/8)[4V\cos(\tilde{\omega}t+\theta)+v\cos(2\tilde{\omega}t+2\theta)]x\\&=0.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&t+\theta/\tilde{\omega}=4NC^{1/2}[8\alpha+3\beta(2V^2+v^2)]^{-1/2}\tau,\\&4NR^{-1}C^{-1/2}[8\alpha+3\beta(2V^2+v^2)]^{-1/2}=\mu c,\\&2\beta[8\alpha+3\beta(2V^2+v^2)]^{-1}=\mu b,\\&6\beta vV[8\alpha+3\beta(2V^2+v^2)]^{-1}=\mu q_1,\\&3\beta v^2[8\alpha+3\beta(2V^2+v^2)]^{-1}2^{-1}=\mu q_2,\\&4NC^{1/2}[8\alpha+3\beta(2V^2+v^2)]^{-1/2}\tilde{\omega}=\omega,\end{aligned}$$

则(将 τ 改写为 t)

$$\ddot{x}+\mu c\dot{x}+x+\mu bx^3+2\mu(q_1\cos\omega t+q_2\cos 2\omega t)x=0, \quad (23.14)$$

而得到共振是 $\omega\approx1$, 2 的两种情况。此处特别考虑 $\omega\approx2$ 的情况，此时

$$f(x,\ \dot{x},\ \omega t)=x\cos 2\omega t,$$

由于对(21.18),(21.19)中的

$$F(\rho_1, \phi)=0, \quad G(\rho_1, \phi)=0,$$

从而(23.14) 中最后一項与 $\omega\approx 2$ 的共振无关，将这項略去(把 q_1 写为 q)，則又回到(23.4)。又在 $\omega\approx 2$ 的情况，电源的角頻率($\tilde{\omega}$)是近似于二次侧回路的固有角頻率 ($N^{-1}\sqrt{\alpha/2C}$)的两倍。二次侧回路的振蕩是电源的頻率的第二分諧波，故存在着两个稳定的近于正弦形的波，彼此相位相差 π。

在 β 小，R 大的情况中，运用文献[11]，[14]的方法，可直接处理(23.13)。

如果将相位相差 π 的两个振动对应于 0 和 1，就能用于二进位的計算。

电子計算机的触发元件(parametron)就是利用这一性质。

参考文献

[1] H. Poincaré: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste; I, II, III (Gauthier-Villars, Paris, 1892).

[2] H. Poincaré: Sur les courbes définies par une équation differentielle, Oeuvres I (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
[А. Пуанкаре: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями (М.-Л., 1947).]

[3] A. M. Liapounoff: Problème générale de la stabilité du mouvement, —Annals of Mathematics Studies, No. 17 (Princeton, 1949).
[А. М. Ляпунов: общая задача об устойчвости движения (М.-Л, 1952).]

[4] G. D. Birkhoff: Dynamical Systems (New York, 1927).

[5] A. A. Andronoff & Chaikin: Theory of Oscillations (Princeton, 1949).
[А. А. Андронов и С. Э. Хайкин: Теория Колебаний (М.-Л., 1937).]

[А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин: Теория Колебаний (М., 1959).]

[6] N. Kryloff & N. Bogoliuboff: Introduction to Non-linear Mechanics, Annals of Mathematics Studies, No. 11 (Princeton, 1947).

[Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов: Введение в нелинейную механику (Киев, 1937).]

[7] N. Minorsky: Introduction to Non-linear Mechanics (Ann. Arbor, 1947).

[8] S. Lefschetz: Lectures on Differential Equations, Annals of Mathematics Studies, No. 14 (Princeton, 1948).

[9] J. J. Stoker: Non-linear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems (New York, 1950).

[Дж. Стокер: Нелинейные колебания в механических и электрических системах (М., 1952).]

[10] N. W. McLachlan: Ordinary Non-linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences (Oxford, 1950, 1956).

[11] Contributions to the Theory of Non-linear Oscillations, Annals of Mathematics Studies, I (No. 20, 1950), II (No. 29, 1952), III (No. 36, 1956) (Princeton).

[12] C. Hayashi: Forced Oscillations in Non-linear Systems (Osaka, 1953).

[Т. Хаяси: Вынужденные колебания в нелинейных системах (М.-Л., 1956).]

[13] J. Haag: Les mouvements vibratoires, I (1952), II (1955) (Paris).

[14] E. A. Coddington & N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations (New York, 1955).

[15] 占部 实：非綫型問題(自励振动論)，現代数学讲座(共立出版株式会社，1957).

[16] 古屋 茂：非綫型問題(强制振动論)，現代数学讲座(共立出版株式会社，1957).

校 后 記

朱 照 宣

非綫性振动理論是一門新兴的边緣性学科，它是常微分方程应用的一个重要方面，也是一般力学(关于离散系統的力学)、自动控制和无綫电物理等的理論基础之一。古屋茂、南云仁一的这本小册子，以簡洁、概括的形式介紹了非綫性振动理論的基本成果。它是一本很好的入門讀物；对于熟悉这方面内容的讀者来說，也不失为一本优秀的提綱式的参考手册。

振动現象在力学系統、电磁系統或其他系統中表現出来的物理本质是多样的，振动理論則用統一的观点来处理各种振动現象，而这种“自然界的統一在关于各种現象領域的微分方程的‘惊人类似’中显示出来”(列宁：唯物主义与經驗批判主义，第五章，第五节，第295頁，人民出版社，1956年3月第三版，北京)。这本小册子是从討論几种典型的微分方程出发的。对于非数学专业的讀者，不妨先翻閱一下各章的例子和§23，可以了解这些数学模型在力学、电学或工程技术問題中的原型。

书中主要討論的是二維的系統，相应于力学中单自由度系統或电学中的单回路系統。实际的振动問題可能不是二維的系統：力学中有多自由度(以及无限自由度)的系統，电学中有多回路的振蕩系統和分布参数的振蕩系統，自动調节系統往往是二阶以上的；它們需要用高維的常微分方程或者用偏微分方程来描述。但是，无論是概念、方法、結果，或者是具体的計算技巧，都可以而且需要从二維系統的分析得到借鉴。

这本小册子叙述了研究非綫性振动的两种方法——几何方法

或者定性的方法，以及解析方法或者定量的方法。一般說来，定性的研究应該在定量研究之前，而且在发展过程中两者相互补充。这两种方法都濫觴于十九世紀末 Poincaré 的著作（見参考文献[1][2]），而把这两种方法用来奠定非綫性振动理論基础的，則是二十世紀三十年代苏联学者的功績。近年来，非綫性振动方面的文献浩繁，专著不下数十，期刊論文則不下数百。恐挂一漏十，这里沒有对于原列参考书作补充。讀者如需进一步探討，可以先参考下列两书：定性（几何）方法，見 Андронов 的經典著作[5]；定量（解析）方法，見 Н. Н. Боголюбов 和 Ю. А. Митропольский 的名著“非綫性振动理論中的漸近方法”（Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1955, 1958）。熟悉英文的讀者，可以从参考文献[5]，[6]两书的英文节譯本中見其大略。此外，还可参考秦元勛編著的“微分方程所定义的积分曲綫”（科学出版社，1959）。这些书都附有詳細的文献目录。

1962 年 5 月